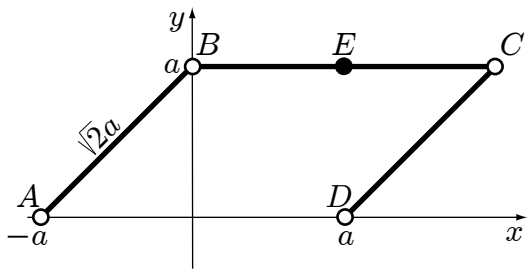
Internetová matematická olympiáda - 29. listopadu 2011

4. ročník

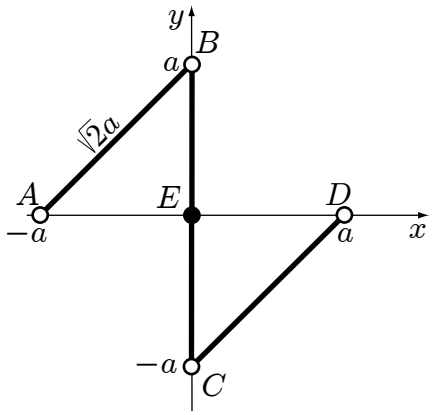
1. Uvažujme rovinný mechanismus, který je tvořen třemi tuhými tyčemi AB, BC a CD. Délky tyčí jsou $|AB| = |CD| = \sqrt{2}a$, $|BC| = 2a$. Ve všech bodech A, B, C, D je rotační kloub, který umožňuje rovinný pohyb tří tyčí. Body $A = [-a, 0]$ a $D = [a, 0]$ $(a > 0)$ zůstávají při pohybu mechanismu na místě. Uprostřed tyče BC uvažujme bod E. Bod E může při pohybu mechanismu opisovat dvě křivky.

   a) Sestavíme-li mechanismus podle Obrázku 1, pak bod E bude opisovat křivku, která je velmi jednoduchá. Hledanou křivku nakreslete a napište její rovnici.



Obrázek 1: K zadání příkladu 1a)

   b) Sestavíme-li mechanismus podle Obrázku 2, pak bod E bude opisovat křivku, která již tak známá není.



Obrázek 2: K zadání příkladu 1b)

   Napovíme vám, že pro body této křivky platí:

   – Součin vzdáleností od dvou pevných bodů (=ohnisek) je roven konstantě.
   – Tato ohniska se nacházejí na přímce AD.

   I tuto složitější křivku nakreslete a určete její rovnici.

Řešení příkladu 1:

ad a)

Sledujme pohyb bodu E v případě, že se obě ramena AB, resp. DC začnou otáčet kolem nehybných bodů A, resp. D stejným směrem (např. v kladném smyslu, tj. proti směru oběhu hodinových ručiček). Vzhledem k tomu, že délka centrálního segmentu BC je totožná se vzdáleností AD, tyč BC pak vykonává jen posuvný pohyb daný polohou bodů B a C, které se otáčejí po kružnicích s poloměrem $r = \sqrt{2}a$. Bod E se tedy pohybuje po kružnici se středem $S = [0, 0]$ a poloměrem $r = \sqrt{2}a$. Středový tvar rovnice kružnice, po které se pohybuje bod E je

$$(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (\sqrt{2}a)^2,$$

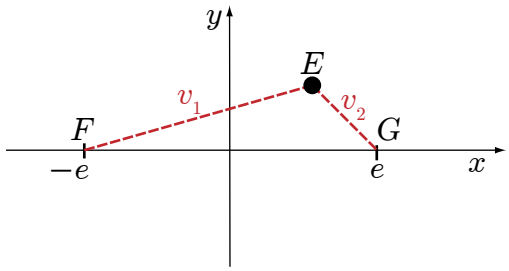
tedy po úpravě

$$x^2 + y^2 = 2a^2.$$

ad b)

Druhá křivka již na první pohled tak zřejmá není. Po úvaze o možném pohybu bodu E dojdeme k závěru, že křivka, po které se pohybuje bod E vypadá jako ležatá osmička symetrická podle osy y.

Ze zadání víme, že body hledané křivky (ležaté osmičky) mají konstatní součin vzdáleností od dvou pevných bodů (=ohnisek). Tuto konstantu označme c ($c > 0$). Dále víme, že ohniska leží na přímce AD, tedy mají y-ovou souřadnici rovnu 0. Využijeme zmíněné symetrie podle osy y a označíme ohniska $F = [-e, 0]$ a $G[e, 0]$ ($e > 0$). Situace je znázorněna na Obrázku 3.



Obrázek 3: K řešení příkladu 1

Napišme rovnice, které z uvedených informací vyplývají.

$$v_1 \cdot v_2 = c,$$
$$v_1^2 \cdot v_2^2 = c^2,$$

tedy

$$((x + e)^2 + y^2) \cdot ((x - e)^2 + y^2) = c^2. \tag{1}$$

Je zřejmé, že hledaná křivka prochází bodem $O = [0, 0]$. Dosazením bodu O do rovnice (1) získáme vztah mezi c a e, tedy

$$c^2 = e^4. \tag{2}$$

Dále je zřejmé, že bod $[\sqrt{2}a, 0]$ leží na hledané křivce. Dosazením tohoto bodu do rovnice (1) a využitím

vztahu (2) získáme vazbu mezi e a a, tedy

$$\begin{aligned}
((\sqrt{2}a+e)^2+0^2)\cdot((\sqrt{2}a-e)^2+0^2) &= e^4\\
(\sqrt{2}a+e)^2\cdot(\sqrt{2}a-e)^2 &= e^4\\
(\sqrt{2}a+e)(\sqrt{2}a-e)\cdot(\sqrt{2}a+e)(\sqrt{2}a-e) &= e^4\\
(2a^2-e^2)(2a^2-e^2) &= e^4\\
(2a^2-e^2)^2 &= e^4\\
4a^4-4a^2e^2+e^4 &= e^4\\
4a^4-4a^2e^2 &= 0\\
4a^2(a^2-e^2) &= 0.
\end{aligned}$$

Podle předpokladů platí $a>0$, proto musí platit

$$(a^2-e^2)=0,$$

tedy

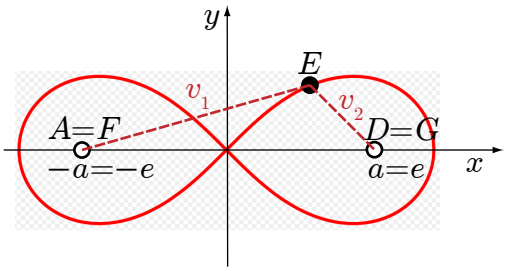
$$e=\pm a. \tag{3}$$

Dosadíme (3) do rovnice (1) a obdržíme

$$((x+a)^2+y^2)\cdot((x-a)^2+y^2)=a^4.$$

Další úpravy vedou již jen k finálnímu tvaru rovnice hledané křivky, kterou je Bernoulliova lemniskáta.

$$\begin{aligned}
((x+a)^2+y^2)\cdot((x-a)^2+y^2) &= a^4\\
(x+a)^2(x-a)^2+y^2(x+a)^2+y^2(x-a)^2+y^4 &= a^4\\
(x^2-a^2)^2+y^2(x^2+2ax+a^2)+y^2(x^2-2ax+a^2)+y^4 &= a^4\\
x^4-2x^2a^2+a^4+y^2(2x^2+2a^2)+y^4 &= a^4\\
-2a^2(x^2-y^2)+x^4+2x^2y^2+y^4 &= 0\\
-2a^2(x^2-y^2) &= -(x^2+y^2)^2\\
2a^2(x^2-y^2) &= (x^2+y^2)^2
\end{aligned}$$



Obrázek 4: K řešení příkladu 1

2. Mějme nekonečně velký čtverečkovaný papír se vzdáleností linek ve vodorovném i svislém směru rovnou 1. Mějme kulatou minci o poloměru $r = \frac{1}{4}$, kterou náhodně házíme na čtverečkovaný papír (na každé místo může dopadnout se stejnou pravděpodobností).

   a) Jaká je pravděpodobnost, že mince leží na dvou různých linkách?

   b) Jaká je pravděpodobnost, že mince leží alespoň na jedné lince?

   c) Jaká je pravděpodobnost, že mince leží na průsečíku dvou linek?

Řešení příkladu 2:

Nejdříve je třeba si uvědomit, že všechny čtverečky mají stejný tvar, a tedy je možno uvažovat situaci pouze v jednom čtverci pod podmínkou, že střed mince může dopadnout na každé místo ve čtverci se stejnou pravděpodobností.

Ze znalosti, kam dopadl střed mince, můžeme okamžitě usoudit, zda-li zadání bude splněno či ne. Proto je výhodné zabývat se pouze úvahami, kam musí dopadnout střed mince, aby zadání bylo splněno, a poté spočítat pravděpodobnost tohoto jevu.

Pravděpodobnosti budeme určovat jako podíl obsahů dvou ploch, tj. $P(A) = \frac{S_1}{S_2}$, kde S_1 je obsah takové plochy, že pokud na ni dopadne střed mince, tak je zadání splněno, S_2 je obsah plochy všech možných dopadů středů mince. Protože střed mince může dopadnout kamkoliv do čtverce, jehož hrana má délku 1, je $S_2 = 1$.

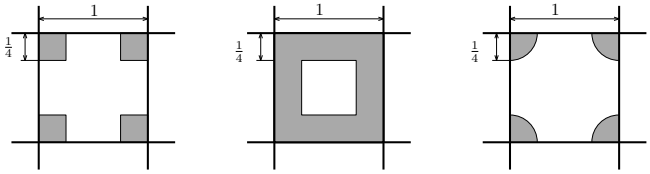
a) Vzhledem k rozměrům mince není možné, aby ležela na dvou různých vodorovných nebo dvou různých svislých linkách. Jedinou možností tedy je, že mince leží na jedné vodorovné a jedné svislé lince.

   Aby mince mohla ležet na lince, tak nesmí její střed padnout dále než do vzdálenosti $\frac{1}{4}$ od dané linky. Místa, která mají vzdálenost menší nebo rovnu $\frac{1}{4}$ od vodorovných a zároveň od svislých linek, jsou vyznačena šedě na Obrázku 5 vlevo.

   Plocha čtverce je rovna 1, plocha šedých částí je $\frac{1}{4}$. Je tedy zřejmé, že pravděpodobnost, že střed mince dopadne do vyznačených oblastí, a tím splní zadání, je $\mathbf{\frac{1}{4}}$.

b) Aby mince mohla ležet alespoň na jedné lince, musí její střed ležet ve vzdálenosti menší nebo rovné $\frac{1}{4}$ alespoň od jedné linky. Všechna místa mající tuto vlastnost jsou na Obrázku 5 uprostřed. Jejich plocha je $\frac{3}{4}$, a tedy i výsledná pravděpodobnost je $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

c) Mince leží na průsečíku dvou linek tehdy, pokud její střed neleží dále než $\frac{1}{4}$ od průsečíku. Tato místa jsou vyznačena na Obrázku 5 vpravo. Jejich obsah i hodnota výsledné pravděpodobnosti jsou rovny $\pi\left(\frac{1}{4}\right)^2$, což je $\mathbf{\frac{\pi}{16}}$.



Obrázek 5: K řešení příkladu 2 a), b), c)

3. Hudební oktáva se skládá z 12 půltónů, které se potom v další oktávě opakují. Každý půltón má na klavíru svoji klávesu. Celá klaviatura má 88 kláves. V současnosti se v evropské hudbě používá nejčastěji tzv. rovnoměrně temperované ladění. Tzn. tón, který leží o oktávu výše než druhý tón, má oproti němu dvojnásobnou frekvenci. Ostatní půltóny vznikly rozdělením oktávy na 12 stejných intervalů - tj. frekvence dvou sousedních půltónů jsou v poměru dvanáctá odmocnina ze dvou ku jedné.

   Vypočítejte frekvenci nejnižšího a nejvyššího tónu klavíru, když víte, že základní tón a1 (tedy komorní a) má od roku 1939 frekvenci 440,00 Hz a je to 49. klávesa klaviatury počítáno od nejnižší.

   Řešení příkladu 3:

   Shrňme si informace získané ze zadání a zaveďme vhodné značení.

   - Klaviatura má 88 kláves, označme frekvence příslušných půltónů $x_1, x_2, \ldots, x_{88}$.
   - Poměr dvou sousedních půltónů je $\frac{\sqrt[12]{2}}{1}$.
   - Frekvence tónu a1 je 440,00 Hz.
   - Tón a1 je 49. klávesa, tedy x_{49}=440,00 Hz.

   Frekvence půltónů tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q = \frac{\sqrt[12]{2}}{1} = \sqrt[12]{2}$. 49. člen této posloupnosti je x_{49}=440,00 Hz. Pro n-tý člen geometrické posloupnosti platí $x_n = x_1 \cdot q^{n-1}$. Proto frekvenci nejnižšího tónu určíme vztahem

$$x_1 = \frac{x_n}{q^{n-1}} = \frac{x_{49}}{q^{49-1}} = \frac{440,00}{\left(\sqrt[12]{2}\right)^{48}} = 27,50 \text{ Hz}$$

   a frekvenci nejvyššího tónu vztahem

$$x_{88} = x_1 \cdot q^{n-1} = x_1 \cdot q^{88-1} = 27,50 \cdot \left(\sqrt[12]{2}\right)^{87} \doteq 4186,01 \text{ Hz}.$$

4. Magický čtverec je čtvercové schéma o n řádcích a n sloupcích, do kterého jsou vepsána libovolná (předem pevně daná) přirozená čísla $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$. Pravidlo pro vepsání čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}$ je takové, že součet čísel v každém řádku, každém sloupci i na obou hlavních diagonálách je stejný. Tomuto součtu říkáme konstanta čtverce a značíme ho S. Pro n liché musí být S dělitelné n. Ukažte, že pro pevně dané $n = 3$ a pevně danou konstantu čtverce S, je prostřední prvek čtverce pevně určený.

   První varianta řešení příkladu 4:

   Označme si prvky v magickém čtverci podle Obrázku 6.

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

Obrázek 6: Magický čtverec pro $n = 3$

   Zapišme vztahy, které musí platit, aby šlo o magický čtverec.

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= S \\ a_4 + a_5 + a_6 &= S \\ a_7 + a_8 + a_9 &= S \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 + a_7 &= S \\ a_2 + a_5 + a_8 &= S \\ a_3 + a_6 + a_9 &= S \end{aligned} \tag{5}$$

$$a_1 + a_5 + a_9 = S \tag{6}$$

$$a_3 + a_5 + a_7 \quad = \quad S \tag{7}$$

Rovnice (4) popisují součty v řádcích, rovnice (5) popisují součty ve sloupcích a poslední dvě rovnice (6), (7) součty na hlavních diagonálách. Sečtením všech tří rovnic (4) (případně všech tří rovnic (5)) dostaneme rovnici

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \quad = \quad 3S. \tag{8}$$

Mnohem zajímavější je ale sečtení posledních dvou rovnic, tedy rovnice (6) a (7). Tak dostaneme vztah

$$a_1 + a_3 + 2a_5 + a_7 + a_9 \quad = \quad 2S. \tag{9}$$

Odečtením rovnice (9) od rovnice (8) dostaneme

$$a_2 + a_4 - a_5 + a_6 + a_8 \quad = \quad S. \tag{10}$$

Tím se nám podařilo snížit počet neznámých $a_1, \ldots, a_9$, na kterých je závislá konstanta S. Ve snižování počtu neznámých můžeme dále pokračovat. Prvky a_2 a a_8 můžeme eliminovat, odečteme-li od rovnice (10) druhou z trojice rovnic (5). Dostaneme tak

$$a_4 - 2a_5 + a_6 \quad = \quad 0. \tag{11}$$

Zbývá poslední krok, tedy eliminace prvků a_4 a a_6 tím, že od rovnice (11) odečteme druhou rovnici z trojice rovnic (4) a obdržíme

$$-3a_5 \quad = \quad -S, \tag{12}$$

což znamená, že

$$a_5 = \frac{S}{3}.$$

Tedy prostřední člen a_5 magického čtverce o devíti polích je pevně daný, máme-li zadanou konstantu S čtverce.

Druhá varianta řešení příkladu 4:

Označme prvky magického čtverce jako a_{ij}, kde i je řádkový index a j sloupcový index prvku. Dále označme prostřední prvek magického čtverce $a_{22} = x$.

Napišme, co platí pro součty prvků na diagonálách a pro prostřední sloupec. Platí

$$\begin{aligned} a_{11} + x + a_{33} &= S, \\ a_{13} + x + a_{31} &= S, \\ a_{12} + x + a_{32} &= S. \end{aligned}$$

Sečtením těchto tří rovnic dostáváme

$$a_{11} + a_{12} + a_{13} + 3x + a_{31} + a_{32} + a_{33} = 3S,$$

kde vidíme také součty prvků prvního a třetího řádku. Tedy

$$S + 3x + S = 3S,$$

odkud jasně vidíme, že pro prvek x uprostřed daného magického čtverce platí $x = \frac{S}{3}$.

5. Matematickou indukcí dokažte, že pro všechna přirozená čísla $n = 1, 2, \ldots$ existuje n-ciferné číslo, jehož všechny cifry jsou liché a jež je dělitelné 5^n.

Řešení příkladu 5:

Abychom si uvědomili jak vést důkaz, je užitečné si několik prvních čísel, která požadavek splňují, ukázat konkrétně. Prvních pět z nich je vypsáno v následující tabulce.

n	5^n	Hledané n-ciferné číslo
1	5	5
2	25	75
3	125	375
4	625	9375
5	3125	59375

Podle této tabulky vyslovíme domněnku, že hledané n-ciferné číslo má vždy všechny cifry na pozici jednotek, desítek, ... stejné jako číslo předchozí, jen je před něj předřazena nějaká lichá číslice. Tohoto poznatku využijeme při důkazu.

Nejprve však zaveďme jednodušší zápis pro n-ciferné číslo $N(n) = a_1 + a_2 \cdot 10 + a_3 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^{n-1}$ ve tvaru $N(n) = [a_n\, a_{n-1} \ldots a_3\, a_2\, a_1]$.

Nyní přistupme k samotnému důkazu matematickou indukcí.

1. **Dokážeme platnost tvrzení pro nejmenší přípustné n:**
   Pro $n = 1$ je hledaným číslem číslo 5, které je skutečně dělitelné 5^1.
2. **Vyslovíme indukční předpoklad pro $n = k$:**
   Předpokládejme, že k-ciferné číslo $N(k) = [a_k\, a_{k-1} \ldots a_3\, a_2\, a_1]$, kde $a_1, \ldots, a_k$ jsou lichá čísla, je dělitelné 5^k. Tedy že platí
   $$N(k) = [a_k\, a_{k-1} \ldots a_3\, a_2\, a_1] = 5^k \cdot c, \text{kde } c \in \mathbb{N}.$$
3. **Dokážeme platnost tvrzení pro $n = k + 1$:**
   Dokážeme, že mezi čísly, která mají $k + 1$ cifer, existuje takové, které je dělitelné 5^{k+1} a jehož cifry jsou liché. Z počáteční úvahy víme, že $(k + 1)$-ciferné číslo má tvar
   $$N(k{+}1) = a_1{+}a_2{\cdot}10{+}a_3{\cdot}10^2{+}\cdots{+}a_k{\cdot}10^{k-1}{+}a_{k+1}{\cdot}10^k = [a_{k+1}\, a_k\, a_{k-1} \ldots a_3\, a_2\, a_1]\,, \text{ kde } a_{k+1} \text{ je liché.}$$
   Takových čísel je pět. Jsou to
   $$\begin{aligned}
   N_1(k+1) &= [1\, a_k \ldots a_3\, a_2\, a_1] = 1 \cdot 10^k + N(k) = 1 \cdot 10^k + 5^k \cdot c = 5^k(1 \cdot 2^k + c),\\
   N_3(k+1) &= [3\, a_k \ldots a_3\, a_2\, a_1] = 3 \cdot 10^k + N(k) = 3 \cdot 10^k + 5^k \cdot c = 5^k(3 \cdot 2^k + c),\\
   N_5(k+1) &= [5\, a_k \ldots a_3\, a_2\, a_1] = 5 \cdot 10^k + N(k) = 5 \cdot 10^k + 5^k \cdot c = 5^k(5 \cdot 2^k + c),\\
   N_7(k+1) &= [7\, a_k \ldots a_3\, a_2\, a_1] = 7 \cdot 10^k + N(k) = 7 \cdot 10^k + 5^k \cdot c = 5^k(7 \cdot 2^k + c),\\
   N_9(k+1) &= [9\, a_k \ldots a_3\, a_2\, a_1] = 9 \cdot 10^k + N(k) = 9 \cdot 10^k + 5^k \cdot c = 5^k(9 \cdot 2^k + c).
   \end{aligned}$$
   Musíme tedy ukázat, že některé z čísel $N_1(k{+}1), N_3(k{+}1), N_5(k{+}1), N_7(k{+}1), N_9(k{+}1)$ je dělitelné číslem 5^{k+1}. Tedy stačí dokázat, že některé z čísel $(1 \cdot 2^k + c)$, $(3 \cdot 2^k + c)$, $(5 \cdot 2^k + c)$, $(7 \cdot 2^k + c)$ a $(9 \cdot 2^k + c)$ je dělitelné číslem 5. Uvedená čísla mají rozdílné zbytky po dělení číslem 5 (stačí si uvědomit, že rozdíl každých dvou z nich není dělitelný pěti). Znamená to, že právě jedno z uvedených čísel je dělitelné pěti.

Dokázali jsme, že pokud existuje n-ciferné číslo dělitelné 5^n, pak existuje $(n + 1)$-ciferné číslo dělitelné 5^{n+1}. Vzhledem k tomu, že víme, že pro $n = 1$ takové číslo existuje, tak jsme dokázali celé tvrzení.

6. Karel má kouzelnou fixu a kouzelnou truhlu, která má všechny hrany červené, což znamená, že je zamčená. Truhla má tvar pravidelného šestibokého hranolu. Kouzlo fixy spočívá v tomto: Pokud s ní Karel přejede po hraně truhly, tak se hrana přebarví podle následujícího schématu. Červená hrana se změní na zelenou, zelená na žlutou a žlutá se změní na červenou. Pokud se Karlovi podaří přebarvit všechny hrany truhly z červené na zelenou, aniž by fixa opustila hranu truhly, pak se truhla odemkne. Je možné truhlu tímto způsobem odemknout? Zdůvodněte.

   Řešení příkladu 6:

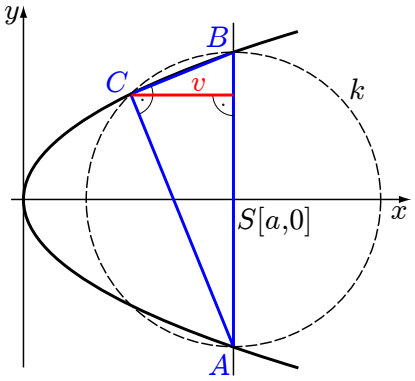
   Ano, zamčenou kouzelnou truhlu s červenými hranami je možné kouzelnou fixou otevřít, tj. přebarvit všechny hrany na zeleno bez zvednutí fixy z hrany truhly. Karel si uvědomil:

   - Fixou se může přesouvat z jednoho vrcholu do libovolného sousedního vrcholu, aniž by změnil barvu hrany. Stačí přejet po hraně třikrát (tam, zpátky, tam).
   - Fixou může přebarvit libovolnou červenou hranu na zelenou, a přitom skončit ve stejném vrcholu, ve kterém začal. Stačí pouze po hraně přejet čtyřikrát (tam, zpátky, tam, zpátky).

   Z toho tedy plyne, že fixou můžeme cestovat po hranách bez nějakého konkrétního plánu. Stačí si pokaždé jen uvědomit, zda chceme následující hranu přebarvit z červené na zelenou, nebo zachovat již zelenou barvu a jen se po hraně přesunout do dalšího vrcholu.

7. Uvažujme všechny pravoúhlé trojúhelníky s přeponami kolmými k ose x a s vrcholy na parabole $y^2 = 2px$, kde $p > 0$. Dokažte, že výška na přeponu je u všech těchto trojúhelníků shodná. (Výškou zde rozumíme vzdálenost mezi vrcholem a patou kolmice, která tímto vrcholem prochází.)

   Řešení příkladu 7:



Obrázek 7: Parabola

Uvažujme situaci načrtnutou na Obrázku 7. Označme bod, ve kterém přepona AB pravoúhlého trojúhelníka ABC protíná osu paraboly jako bod $S[a, 0]$. Poznamenejme, že osa paraboly je totožná s osou x.

Přepona AB leží na přímce dané rovnicí

$$x = a, \qquad \text{kde } a \geq 2p. \tag{13}$$

Spočtěme průnik přepony AB s parabolou, tj. dosadíme rovnici (13) do rovnice paraboly $y^2 = 2px$, tedy

$$y^2 = 2pa,$$

odkud

$$y = \pm\sqrt{2pa}.$$

Vrcholy A a B mají tedy souřadnice $[a, \sqrt{2pa}]$ a $[a, -\sqrt{2pa}]$.

Množina všech vrcholů pravých úhlů sestrojených nad přeponou AB bude Thaletova kružnice k se středem $S[a, 0]$ a poloměrem r. Rovnice kružnice k je tedy

$$k: \quad (x-a)^2 + y^2 = r^2. \tag{14}$$

Pro poloměr $r = |SA|$ kružnice k tedy platí

$$r = \sqrt{2pa}. \tag{15}$$

Dosazením rovnice (15) a rovnice paraboly $y^2 = 2px$ do rovnice (14) dostáváme

$$(x-a)^2 + 2px = 2pa.$$

Jde o kvadratickou rovnici, která má po úpravě tvar

$$x^2 + x(2p - 2a) + a^2 - 2pa = 0. \tag{16}$$

Diskriminant kvadratické rovnice (16) je roven

$$D = 4(p-a)^2 - 4(a^2 - 2pa) = 4p^2.$$

Vidíme, že diskriminant je vždy kladný, rovnice (16) má tedy dva reálné kořeny, jimiž jsou $x_1 = a$ a $x_2 = a - 2p$. První z kořenů odpovídá x-ovým souřadnicím bodů A, B přepony, druhý kořen je pak x-ová souřadnice vcholu C, u kterého je pravý úhel.

Nyní nám zbývá určit vztah pro určení výšky v pravoúhlého trojúhelníku ABC, který splňuje požadované vlastnosti.

Výška v, kterou hledáme, je vzdálenost bodu C od přepony. Vzhledem k situaci stačí zjistit rozdíl x-ových souřadnic jejích krajních bodů, tedy

$$v = a - (a - 2p) = 2p.$$

Hledaná výška v závisí pouze na parametru p paraboly, a proto bude stejná pro všechny pravoúhlé trojúhleníky s přeponou kolmou k ose pevně dané paraboly a s vrcholy na této parabole.

8. Určete pravděpodobnost, že dvě náhodně vybraná přirozená čísla jsou nesoudělná. Předpokládejme přitom, že pravděpodobnost, že vybereme sudé číslo je $\frac{1}{2}$. Pravděpodobnost stačí zapsat ve formě vzorce.

Řešení příkladu 8:

Dvě přirozená čísla jsou nesoudělná, jestliže jejich největší společný dělitel je číslo 1. Základní věta aritmetiky nám říká, že každé přirozené číslo větší než 1 lze jednoznačně rozložit na součin prvočísel. Odtud plyne, že dvě přirozená čísla jsou nesoudělná právě tehdy, když obě zároveň nejsou dělitelná žádným stejným prvočíslem.

Pravděpodobnost, že libovolné přirozené číslo je dělitelné prvočíslem p je $\frac{1}{p}$ (např. každé páté přirozené číslo je dělitelné číslem 5). Odtud plyne, že pravděpodobnost, že dvě náhodně vybraná přirozená čísla jsou obě dělitelná tímto prvočíslem, je $\frac{1}{p^2}$. Pravděpodobnost, že alespoň jedno ze dvou přirozených čísel není dělitelné prvočíslem p je tedy $1 - \frac{1}{p^2}$ (jedná se o pravděpodobnost opačného jevu). Nyní je důležité si uvědomit, že dělitelnost různými prvočísly tvoří nezávislé jevy. Proto lze pravděpodobnost, že dvě náhodně vybraná přirozená čísla jsou nesoudělná, zapsat jako součin jednotlivých pravděpodobností pro všechna možná prvočísla:

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right), \ \mathcal{P} \text{ je množina všech prvočísel.}$$

Tento výraz lze dále upravit za použití tzv. Riemannovy zeta funkce $\zeta(s)$, která je definovaná jako: $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$. Hledanou pravděpodobnost je tedy možné vyjádřit následovně:

$$\prod_{p\in\mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-2}}\right)^{-1} = \left(\prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-2}}\right)^{-1} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \approx 61\%.$$

9. Jeden dělník vykope jámu za jednu hodinu. Dva stejně zdatní dělníci by ji tedy teoreticky vykopali za půl hodiny, ovšem jáma je natolik malá, že si navzájem zavazí. Uvažujme tedy, že příchodem druhého dělníka se efektivita prvního dělníka sníží na polovinu. Třetí dělník sníží efektivitu oběma předchozím dělníkům opět na polovinu a tak dále. Příchodem každého dalšího dělníka se efektivita všech předchozích sníží na polovinu oproti stavu, který je před příchodem tohoho dělníka.

   Rádi bychom měli jámu vykopanou co nejdříve, proto si pozveme nekonečně mnoho dělníků. Za jak dlouho těchto nekonečně mnoho dělníků jámu vykope?

   Řešení příkladu 9:

   Efektivita „posledního“ z nekonečně mnoha dělníků je 1. Dělník před ním má efektivitu $\frac{1}{2}$. Další před ním $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$. A tak dále. Zřejmě dostaneme řadu $1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \left(\frac{1}{2}\right)^3, \ldots$, jejíž členy vyjadřují efektivitu jednotlivých kopáčů. Jde o nekonečnou geometrickou řadu, kde $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ a kvocient $q = \frac{1}{2}$. Tedy platí, že $|q| < 1$. Pro součet nekonečné řady platí, že je roven

$$\lim_{n\to\infty} s_n, \text{ kde } s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

   Vypočteme tedy požadovanou limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\right) = 2.$$

   Efektivita nekonečně mnoha dělníků je celkově rovna 2.

   Víme, že pro dělníka s efektivitou 1 je vykopání jámy práce na 60 minut. Pro nekonečně mnoho dělníků s celkovou efektivitou 2 to bude práce na x minut.

   K výpočtu času použijeme nepřímou úměrnost, protože platí, že čím větší efektivita výkonu, tím kratší čas na výkop potřebujeme.

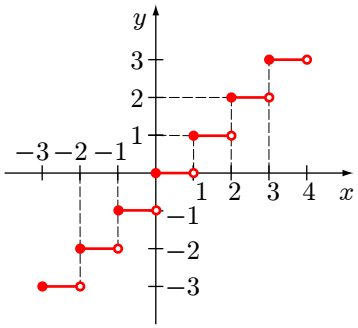
$$\downarrow \begin{array}{lcl} \text{efektivita 1} & \ldots & 60 \text{ minut} \\ \text{efektivita 2} & \ldots & x \text{ minut} \end{array} \uparrow$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} & = & \frac{x}{60} \\ x & = & 30 \end{array}$$

   Nekonečně mnoho dělníků by jámu vykopalo za 30 minut.

10. Načrtněte graf funkce $y = \mathrm{e}^{\lfloor \sin x \rfloor}$.

Poznámka: e *je základ přirozeného logaritmu.* $y = \lfloor x \rfloor$ *je funkce „dolní celá část čísla* x*“, která každému reálnému číslu přiřazuje největší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu* x*. Graf funkce* $y = \lfloor x \rfloor$ *je na Obrázku 8.*



Obrázek 8: Graf funkce $y = \lfloor x \rfloor$

Řešení příkladu 10:

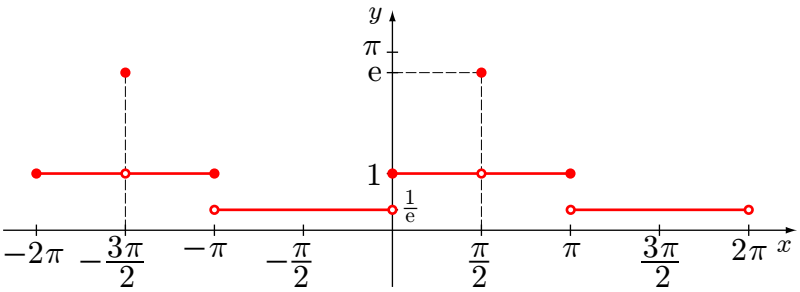
Stačí si uvědomit, jakých hodnot nabývá funkce $\lfloor \sin x \rfloor$. Platí

$$\lfloor \sin x \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{pro } x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Potom $\mathrm{e}^{\lfloor \sin x \rfloor}$ nabývá hodnot

$$\mathrm{e}^{\lfloor \sin x \rfloor} = \begin{cases} \mathrm{e} & \text{pro } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ \frac{1}{\mathrm{e}} & \text{pro } x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi), k \in \mathbb{Z}, \\ 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

a graf je na Obrázku 9.



Obrázek 9: Graf funkce $y = \mathrm{e}^{\lfloor \sin x \rfloor}$

Internetovou matematickou olympiádu pro Vás oragnizuje Ústav matematiky FSI VUT v Brně. Na přípravě zadání a celé realizaci se nemalou měrou podílejí studenti bakalářského a magisterského oboru Matematické inženýrství a doktorského oboru Aplikovaná matematika na Fakultě strojního inženýrství VUT v Brně.
www.math.fme.vutbr.cz, hoderova@fme.vutbr.cz