Masarykova univerzita

Přírodovědecká fakulta
Katedra matematiky

STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

Sbírka příkladů

Bakalářská práce

Brno 2006 Hana Halfarová

Vedoucí bakalářské práce :
Doc. RNDr. Josef Janyška, CSc.

Vypracovala :
Hana Halfarová

Děkuji
Doc. RNDr. Josefu Janyškovi, CSc., z Katedry matematiky Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity, za konzultace a odborné vedení při vypracovávání bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně a použila pouze literaturu uvedenou v seznamu literatury, který je v práci uveden.

Současně souhlasím, aby práce byla uložena na Masarykově univerzitě v knihovně Přírodovědecké fakulty a popřípadě také zpřístupněna na internetových stránkách fakulty ke studijním účelům.

. . . .

Obsah

Úvod

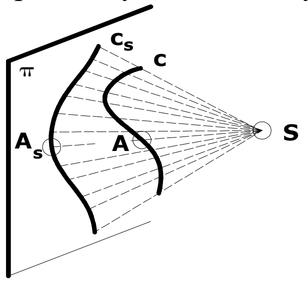
Tato sbírka řešených úloh je určena studentům deskriptivní geometrie pro procvičení základních úloh středového promítání, které patří mezi základní zobrazovací metody a má další využití například v lineární perspektivě, fotogrametrii, stereoskopickém promítání a v některých metodách kartografie.

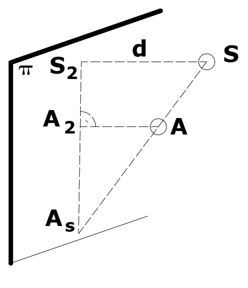
Sbírka je rozdělena do sedmi částí. Za každým příkladem je napsán stručný popis konstrukce a v příloze se nachází předrýsované zadání, které má sloužit studentům, aby si mohli sami zkusit daný příklad vyřešit. V některých příkladech se využívá znalostí z předcházejících úloh a odkazuje se na ně.
Předpokládají se znalosti rovnoběžných projekcí, projektivní geometrie a středové kolineace v rovině.

Nejprve si řekněme něco o **středovém promítání**:
Středové promítání je určené průmětnou a vlastním středem promítání S, který neleží v průmětně. Průmětu útvaru při středovém promítání se říká středový průmět. Důležitou roli ve středovém promítání má rovina, která prochází středem promítání a je rovnoběžná s průmětnou, nazývá se středová rovina. Středové průměty útvarů, které leží ve středové rovině, jsou nevlastní. Zadáním středového průmětu útvaru (bodu, přímky atd.) v průmětně není v prostoru útvar jednoznačně určen, a proto ještě sestrojujeme jeho pravoúhlý průmět do téže průmětny. Výše popsané promítání se nazývá středové promítání na jednu průmětnu a zabývá se jím tato sbírka. U středového promítání s pomocnou průmětnou promítáme útvar jednak středově do průmětny, jednak pravoúhle do pomocné průmětny kolmé k průmětně. Pravoúhlý průmět pak promítneme opět středově ze středu S do průmětny. Kombinace obou středových promítání je tzv. technické středové promítání.

Středové promítání má několik odlišností od rovnoběžných projekcí, jako např.: je definováno v rozšířeném eukleidovském prostoru, některé nevlastní body se promítají do vlastních a naopak, nezachovává se rovnoběžnost přímek a dělící poměr tří bodů na přímce apod. Určování viditelnosti je komplikovanější než v rovnoběžných projekcích. Geometrické konstrukce jsou poměrně složité a často vycházejí mimo nákresnu, a proto tato metoda není vhodná k sestrojování složitějších objektů. Přesto jsou obrazy sestrojené pomocí středového promítání názorné, zvláště při vhodné volbě vzdálenosti středu promítání od průmětny. To se využívá v lineární perspektivě, která je jen speciálním případem technického středového promítání a jejíž metody slouží k názornému zobrazování objektů technické praxe.

Princip středového promítání je znázorněný na obrázcích, kde na prvním je zobrazený středový průmět křivky a jednoho jejího bodu do průmětny ze středu promítání S a na druhém je zobrazený středový a pravoúhlý průmět bodu A, pravoúhlý průmět bodu S a jeho vzdálenost d od průmětny, která se nazývá distance.





Ve většině příkladů této sbírky je středové promítání určené hlavním bodem S_2, což je pravoúhlý průmět středu promítání, a distanční kružnicí, která je určena hlavním bodem a poloměrem d. V některých úlohách nebude ani hlavní bod ani distanční kružnice zadána, což bude znamenat, že tato konstrukce je nezávislá na volbě konkrétního středového promítání. To platí obecně pro řešení takových polohových úloh, ve kterých se nepracuje se středovými průměty útvarů a nepoužívá se jejich pravoúhlých průmětů.

První část sbírky tvoří příklady na **zobrazení bodu a přímky**. V těchto příkladech procvičujeme základní pojmy týkající se bodů a přímek jako např. středový nebo pravoúhlý průmět bodu, určení kóty bodu, středový a pravoúhlý průmět přímky, odchylku přímky od průmětny. Pokud je bod zadán na libovolné přímce, tzv. nositelce, procvičujeme jak sestrojit jeho pravoúhlý průmět, jak sestrojit přímku zadanou dvěma body, dále jak najít stopník a úběžník přímky atd.

Druhá část se zabývá **vzájemnou polohou přímek**. Určujeme, zda jsou přímky rovnoběžné, mimoběžné nebo různoběžné. Jsou-li různoběžné, najdeme i jejich průsečík. Přímky máme zadány různými způsoby, a proto si zde procvičíme i zobrazení přímky.

Třetí část obsahuje příklady týkající se **zobrazení roviny**. V těchto úlohách se zabýváme sestrojením stopy a úběžnice roviny, která může být zadaná několika způsoby. Také řešíme příklady týkající se odchylky roviny od průmětny nebo přímek a bodů, které leží v rovině.

Ve čtvrté části určujeme **vzájemnou polohu rovin**, **roviny a přímky** a hledáme **příčku mimoběžek**. V příkladech hledáme průsečnici rovin, průsečík přímky a roviny. Dále pomocí předcházejících úloh řešíme další příklady, kdy sestrojujeme např. příčku mimoběžek.

V páté části řešíme **metrické úlohy** a **osu mimoběžek**. Zjišťujeme skutečnou velikost úsečky, nebo úsečku rozdělujeme na několik částí. Hledáme vzdálenost bodu od roviny tak, že sestrojíme kolmici k rovině, nebo naopak máme za úkol sestrojit kolmou rovinu k přímce vedenou daným bodem. Kolmé roviny využíváme také při hledání osy dvou mimoběžek.

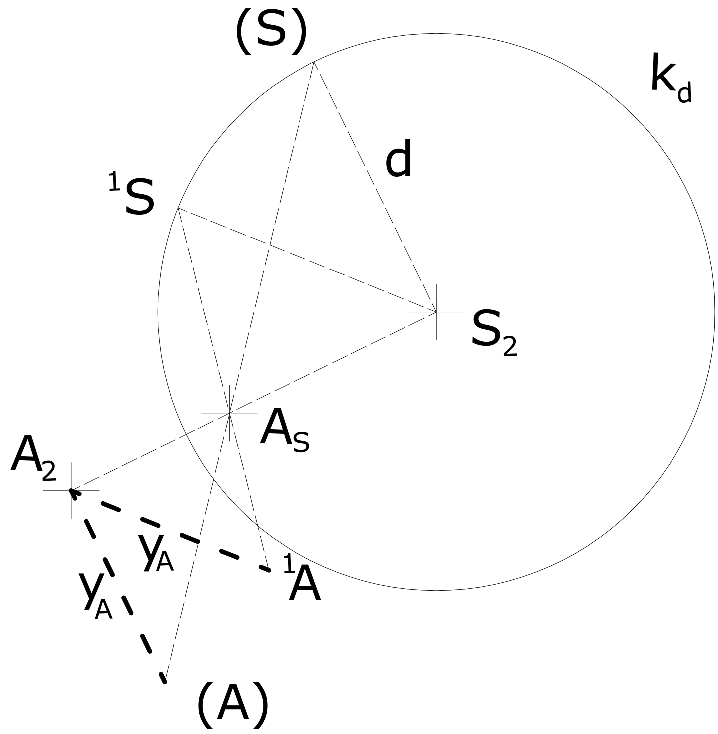
Šestá část se týká **otáčení roviny** a **útvarů v rovině**. Pro řešení příkladů v této části musíme nejprve rovinu otočit do průmětny. V průmětně tak kromě středových průmětů A_S bodů A dané roviny dostaneme ještě jejich otočené polohy A_O. Body A_O, A_S si odpovídají ve středové kolineaci. Osou kolineace je stopa dané roviny a středem kolineace je otočená poloha bodu S_O středu promítání S, jedna úběžnice je u_S a druhá v_S je průmětem protiúběžnice. Přesná konstrukce otáčení roviny a sestrojení útvarů v rovině je popsaná v konstrukcích v jednotlivých příkladech. V této části se zaměřujeme na zobrazení kružnice v rovině.

V poslední části se zabýváme **zobrazením těles**. V těchto příkladech sestrojujeme obrazy těles, což vyžaduje znalosti, které jsme cvičili v předcházejících částech. Kromě toho řešíme příklady, které se týkají sestrojení středového průmětu kulové plochy.

Jak už bylo řečeno na počátku, tato sbírka obsahuje pouze základní příklady, a proto se složitějšími příklady typu: průniku přímky s tělesem, průnik těles, řezy na tělese, osvětlením těles atd. nebudeme zabývat.

Zobrazení bodu a přímky

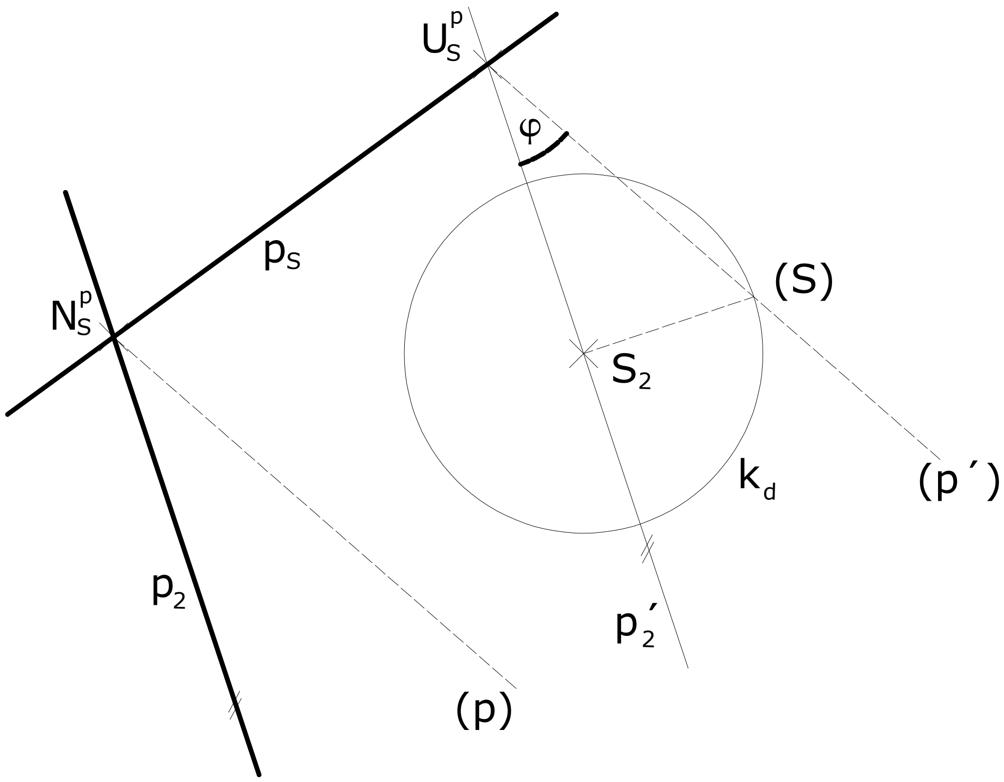
Příklad 1) Určete kótu bodu, je-li dán jeho středový a kolmý průmět.



Řešení: 1.způsob: Kolmým průmětem A_2 bodu A vedeme přímku libovolným směrem různým od ordinály A_SA_2. Rovnoběžka $^1SS_2$ vedená s ní hlavním bodem protíná distanční kružnici v bodě ^1S, jehož spojnice se středovým průmětem A_S bodu A vytíná na první přímce bod ^1A, kde úsečka $A_2{}^1A$ určuje hledanou kótu y_A bodu.

2.způsob: Kótu bodu lze určit sklopením promítací kolmé roviny, určené kolmou a středově promítací přímkou bodu. Sklopeným bodem *(S)* vedeme přímku bodem A_S. Přímka $(S)A_S$ určuje sklopený promítací paprsek bodu A. Bod *(A)* leží na sklopeném promítacím paprsku a na kolmici z bodu A k ordinále A_SA_2. Úsečka $A_2(A)$ určuje hledanou kótu y_A bodu.

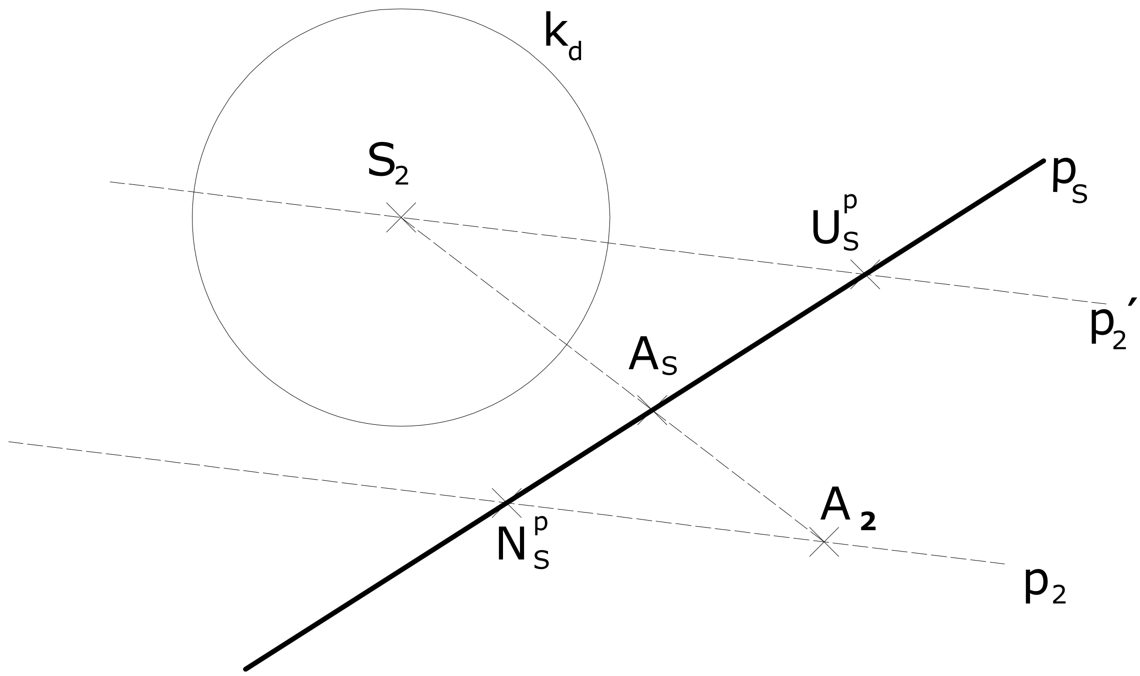
Příklad 2) Přímka *p* je dána stopníkem N_S^p a úběžníkem U_S^p. Sestrojte její pravoúhlý průmět a určete její odchylku od průmětny.



Řešení: Směrová přímka *p´* je rovnoběžná s přímkou *p* a prochází středem promítání, proto pravoúhlý průmět p_2' prochází hlavním bodem S_2 a úběžníkem U_S^p přímky. Přímka $p_2 \parallel p_2'$ vedená stopníkem N_S^p je hledaný pravoúhlý průmět přímky *p*.

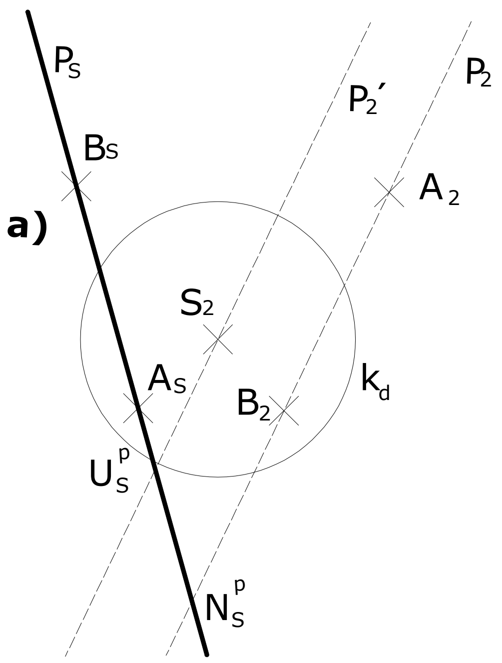
Odchylku φ zjistíme tak, že sklopíme kolmou promítací rovinu směrové přímky *p´* do průmětny. Sklopený bod *(S)* a úběžník U_S^p určují sklopenou směrovou přímku *(p´)*. Úhel, který svírají přímky p_2' a *(p´)*, je hledaná odchylka přímky od průmětny.

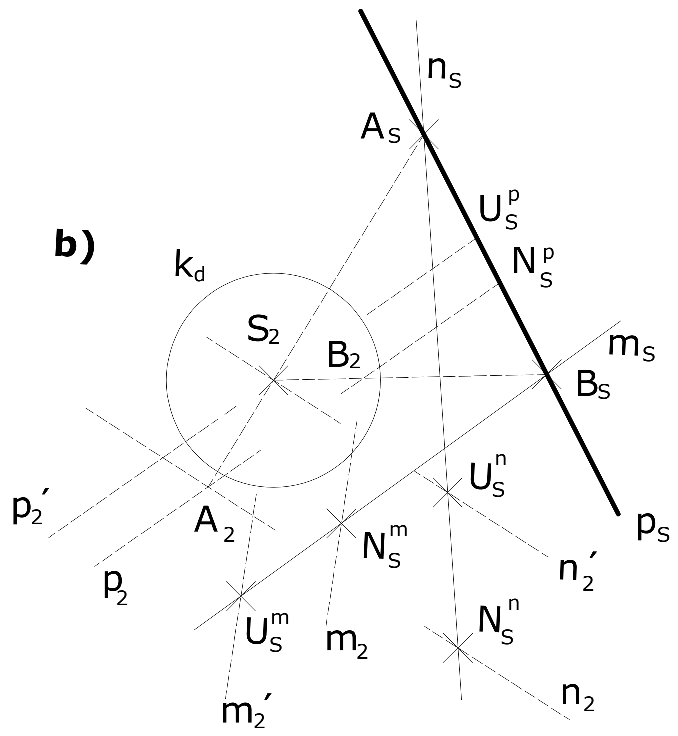
Příklad 3) Je dán středový průmět A_S bodu A, stopník N_S^p a úběžník U_S^p některé jeho nositelky p. Sestrojte jeho pravoúhlý průmět A_2.



Řešení: Bod A leží na nositelce p, proto pravoúhlý průmět A_2 bodu A leží na pravoúhlém průmětu p_2 přímky p. Pravoúhlý průmět p_2 sestrojíme jako v příkladu 2). Dále bod A_2 leží na ordinále S_2A_S. Průnikem ordinály S_2A_S a přímky p_2 dostáváme pravoúhlý průmět A_2 bodu A.

Příklad 4) Určete stopník a úběžník přímky *p*, která je dána: a) různými body *A* a *B* určenými středovým a pravoúhlým průmětem. b) středovým průmětem A_S a B_S na nositelkách n_S a m_S.

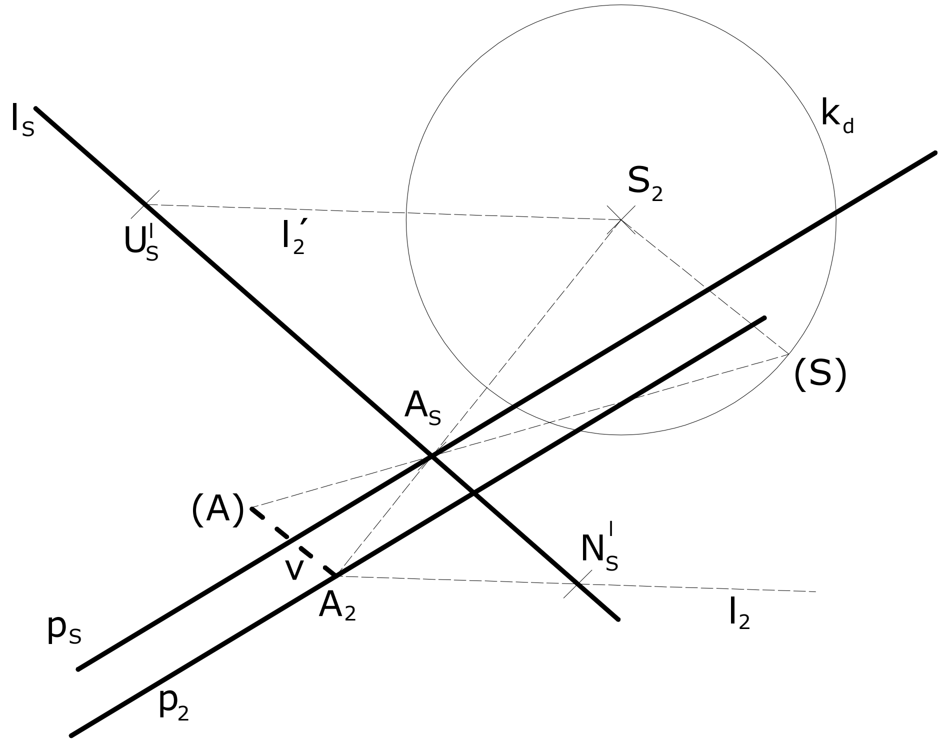




Řešení: a) Středové průměty bodů A_S a B_S určují středový průmět p_S přímky *p*. Dále pravoúhlé průměty bodů A_2 a B_2 určují pravoúhlý průmět p_2 přímky *p*. Průnikem přímky p_2 a p_S je stopník N_S^p přímky p_S. Pro sestrojení úběžníku vedeme přímku $p'_2 \parallel p_2$ hlavním bodem S_2, průnikem p'_2 a p_S je úběžník U_S^p přímky p_S.

b) Stejným postupem jako v příkladu 3) sestrojíme pravoúhlé průměty A_2 a B_2 bodů *A* a *B*. Dále postupujeme podle případu a).

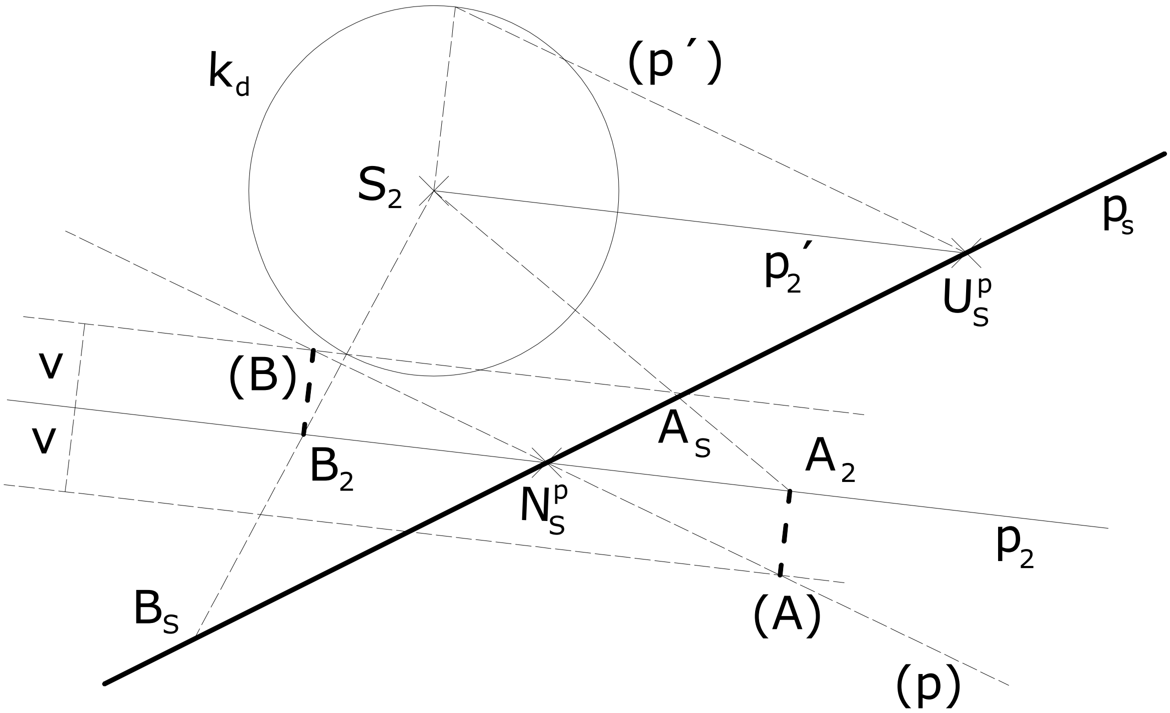
Příklad 5) Určete pravoúhlý průmět p_2 přímky p. Přímka p je rovnoběžná s průmětnou a bod A, který je určen středovým průmětem A_S a nositelkou l, na ní leží. Dále určete vzdálenost přímky p od průmětny.



Řešení: Pravoúhlý průmět p_2 přímky p je rovnoběžný se středovým průmětem p_S, neboť přímka p je rovnoběžná s průmětnou, a proto stopník přímky p_S je nevlastní bod. Proto stačí najít pravoúhlý průmět bodu A_2 a vést jím přímku $p_2 \parallel p_S$. Bod A_2 sestrojíme pomocí nositelky l. Úběžníkem U_S^l a hlavním bodem S_2 vedeme přímku l_2', která je pravoúhlým průmětem směrové přímky l'. Stopníkem N_S^l vedeme přímku $l_2 \parallel l_2'$. Průnikem přímky l_2 a ordinály $S_2 A_2$ je bod A_2, kterým vedeme rovnoběžku p_2 s přímkou p_S.

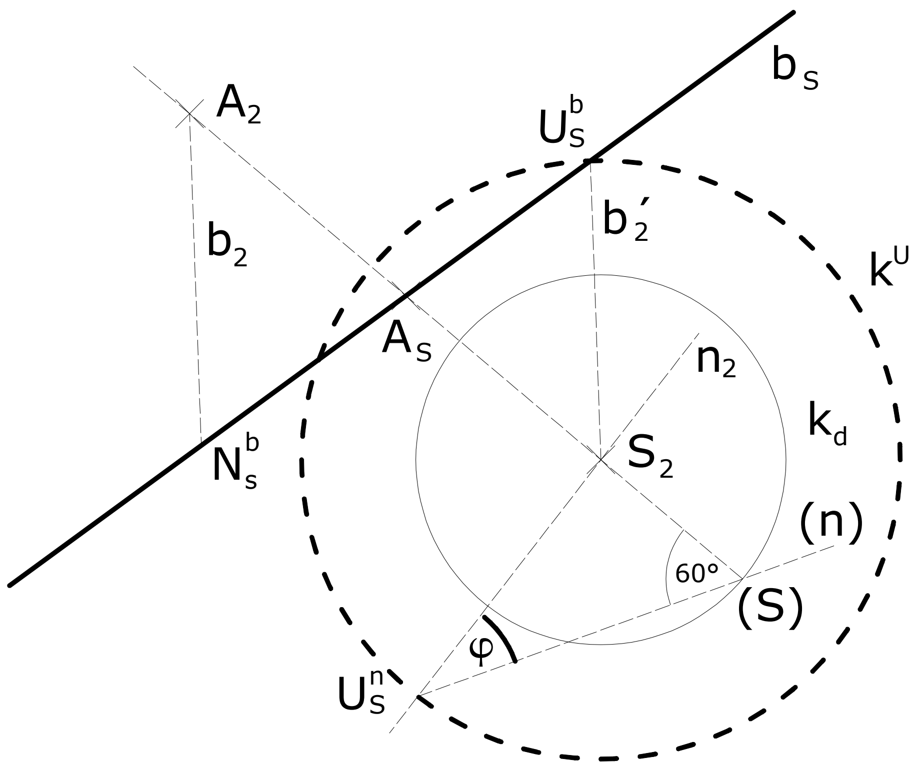
K určení vzdálenosti přímky p od průmětny stačí určit vzdálenost jednoho jejího bodu. Vezmeme-li bod A, pak hledaná vzdálenost odpovídá jeho kótě. Tu určíme sklopením kolmé promítací roviny přímky SA do průmětny - viz. příklad 1) 2.způsob. Pak hledaná vzdálenost v je velikost úsečky $(A)A_2$.

Příklad 6) Na přímce *p* určete bod, jehož vzdálenost od průmětny je *v*. Přímka *p j*e zadaná stopníkem a úběžníkem.



Řešení: Nejprve určíme pravoúhlý průmět p'_2 směrové přímky p' a pravoúhlý průmět p_2 přímky *p* - viz. příklad 2). Sklopením pravoúhlé promítací roviny přímky p' do průmětny získáme sklopený směrový paprsek *(p´)* a sklopením pravoúhlé promítací roviny přímky *p* do průmětny dostaneme *(p)* , kde platí *(p)* || *(p´)*. Body v dané vzdálenosti *v* od průmětny získáme tak, že vedeme rovnoběžky ve vzdálenosti *v* od přímky p_2 a průnikem se sklopenou přímkou *(p)*. Dostáváme sklopené body *(A)* a *(B)* bodů *A*, *B*. Zpětným otočením pravoúhlé promítací roviny přímky *p* obdržíme pravoúhlé průměty A_2, B_2. Středové průměty bodů *A, B* leží na ordinále S_2A_2 a S_2B_2 . Průsečíky ordinál bodů A_2, B_2 s přímkou p_S jsou hledané body.

Příklad 7) Bodem A veďte přímku b svírající s průmětnou odchylku φ =30°. Bod A je určen pravoúhlým A_2 a středovým průmětem A_S.

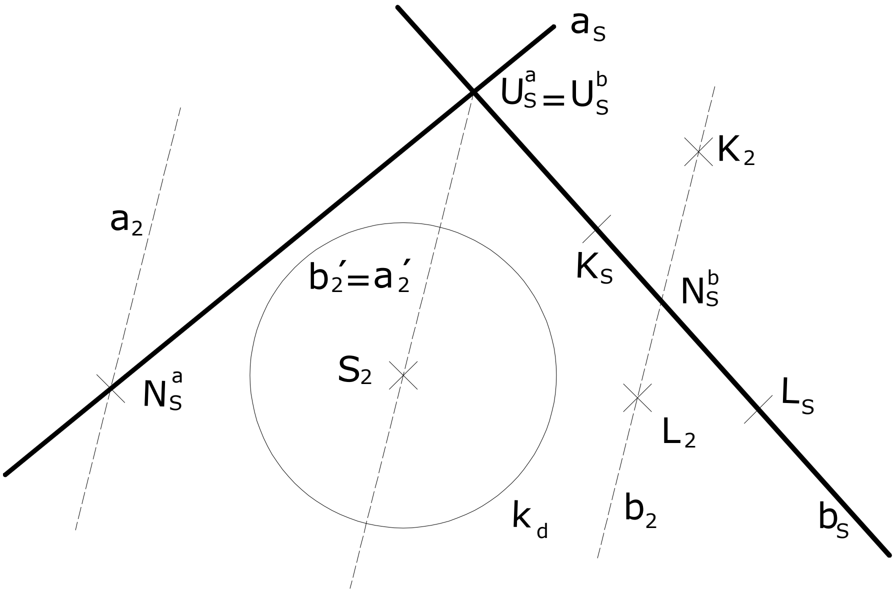


Řešení: Přímek procházející bodem A a svírající s průmětnou úhel φ =30° je nekonečně mnoho. Množina úběžníků těchto přímek tvoří kružnici k^U. Tu sestrojíme pomocí libovolné přímky n, která prochází středem promítání a svírá s průmětnou úhel φ. Přímkou n vedeme pravoúhlou promítací rovinu, kterou sklopíme. Sklopená přímka *(n)* svírá s pravoúhlým průmětem n_2 úhel 30° a prochází bodem *(S)*. Průsečík přímky n_2 a *(n)* je úběžník přímky n. Tímto úběžníkem vedeme kružnici k^U se středem v hlavním bodě S_2. Můžeme sestrojit libovolnou přímku b procházející bodem A. Středový průmět b_S přímky b prochází středovým průmětem A_S bodu A a protíná kružnici k^U v úběžníku U_S^b. Dále stačí najít stopník přímky b, aby byla přímka určena. Úběžníkem U_S^b a bodem S_2 vedeme pravoúhlý průmět $b_2{}'$ směrové přímky b'. Pravoúhlý průmět b_2 přímky b je rovnoběžný s přímkou $b_2{}'$ a prochází pravoúhlým průmětem A_2 . Průsečík přímek b_2 a b_S je stopník N_S^b přímky b.

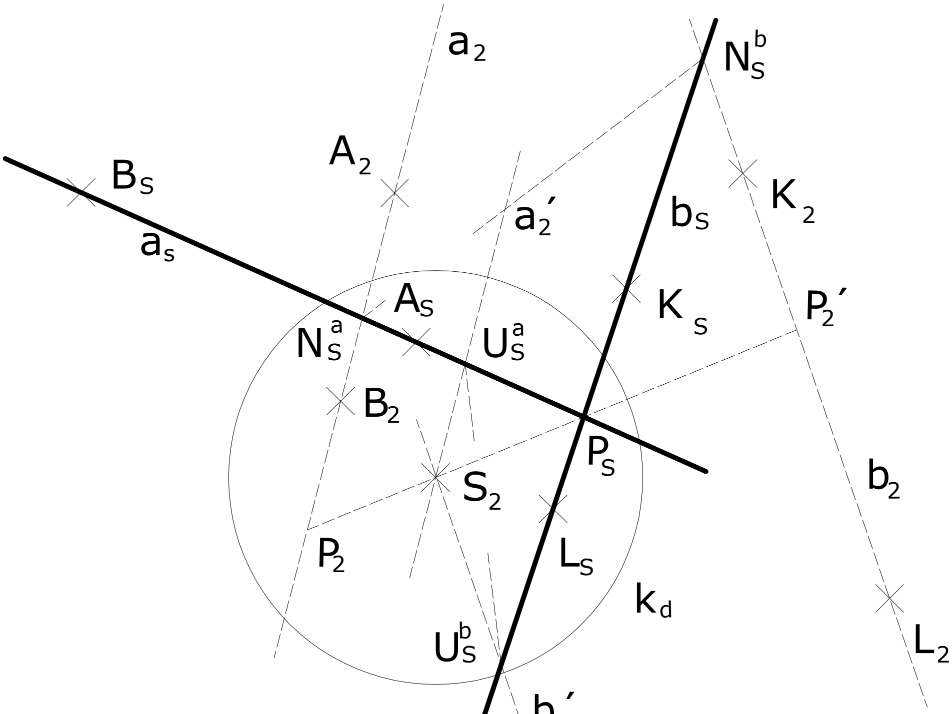
Vzájemná poloha přímek

Příklad 8) Určete vzájemnou polohu přímek *a*, *b*: a) přímka *a* je zadaná středovým průmětem, přímka *b* je daná dvěma body *K* a *L*. b) přímka *a* je zadaná body *A*, *B* a přímka *b* je zadaná body *K, L*. c) přímky *a* i *b* jsou zadány středovými průměty.

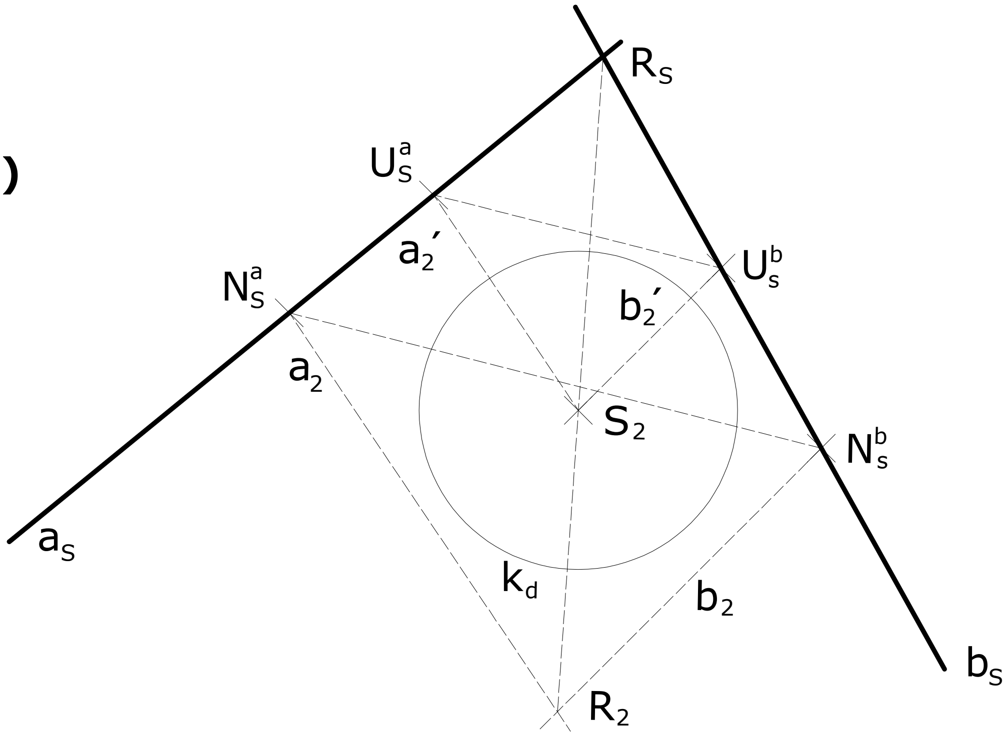
a)



b)



c)

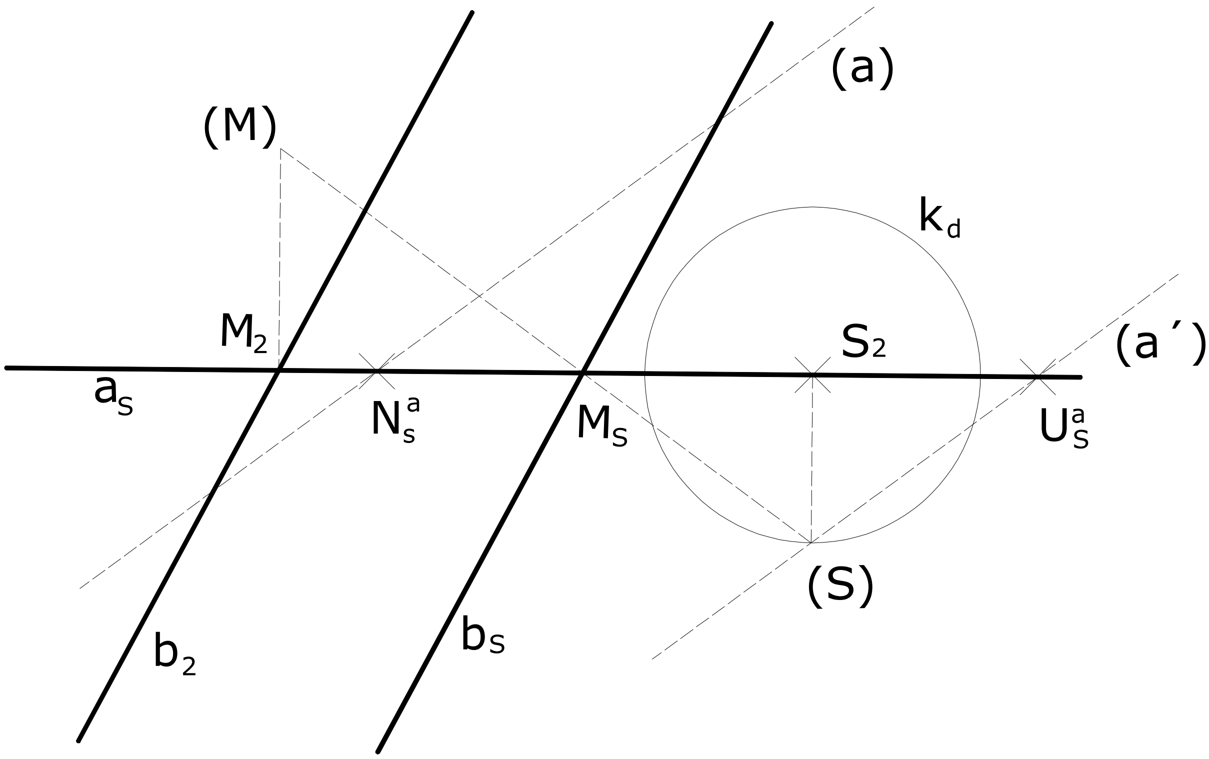


Řešení: a) Spojíme-li středové průměty bodů *K* a *L*, dostaneme středový průmět přímky *b*. Dále spojíme pravoúhlé průměty K_2 a L_2, získáme pravoúhlý průmět b_2 přímky *b*. Pro určení úběžníku vedeme přímku $b'_2 \parallel b_2$. Průnik pravoúhlého průmětu směrové přímky b'_2 a b_S je úběžník U_S^b přímky *b* a ten odpovídá úběžníku přímky *a*. Úběžníky si odpovídají a pravoúhlé průměty přímek *a*, *b* jsou rovnoběžné, proto jsou i přímky *a, b* rovnoběžné.

b) Spojíme-li středové průměty bodů *A, B* a středové průměty *K, L,* získáme středový průmět přímky *a* a *b*. Dále spojíme pravoúhlé průměty bodů *A, B* a *K, L*, dostaneme pravoúhlé průměty přímky *a* i *b*. Určíme středové průměty směrových přímek jako v příkladu a) a zjistíme úběžníky přímek *a, b*. Úběžníky si neodpovídají, nejedná se o rovnoběžky. Dále máme dvě možnosti: 1) Vedeme přímku úběžníky U_S^b a U_S^a a také stopníky N_S^a a N_S^b . Přímky $U_S^bU_S^a$ a $N_S^aN_S^b$ nejsou rovnoběžné a tedy jedná se o mimoběžky.
2) Bod P_S je společným bodem středových průmětů přímek *a, b*. Najdeme jeho pravoúhlý průmět na přímce a_2 a b_2. Ten leží na ordinále S_2P_S. Dostáváme dva pravoúhlé průměty P_2'a P_2, které si neodpovídají, proto jde o mimoběžky.

c) Úběžníky si neodpovídají, nejedná se tedy o rovnoběžky. Dále pokračujeme jako v případě b). Zjistíme, že přímky $U_S^bU_S^a$ a $N_S^aN_S^b$ jsou rovnoběžné. Také bod *R* je společným bodem přímek. Shoduje se jak středový průmět, tak i pravoúhlý průmět. Přímky *a, b* jsou různoběžné a bod *R* je jejich průsečík.

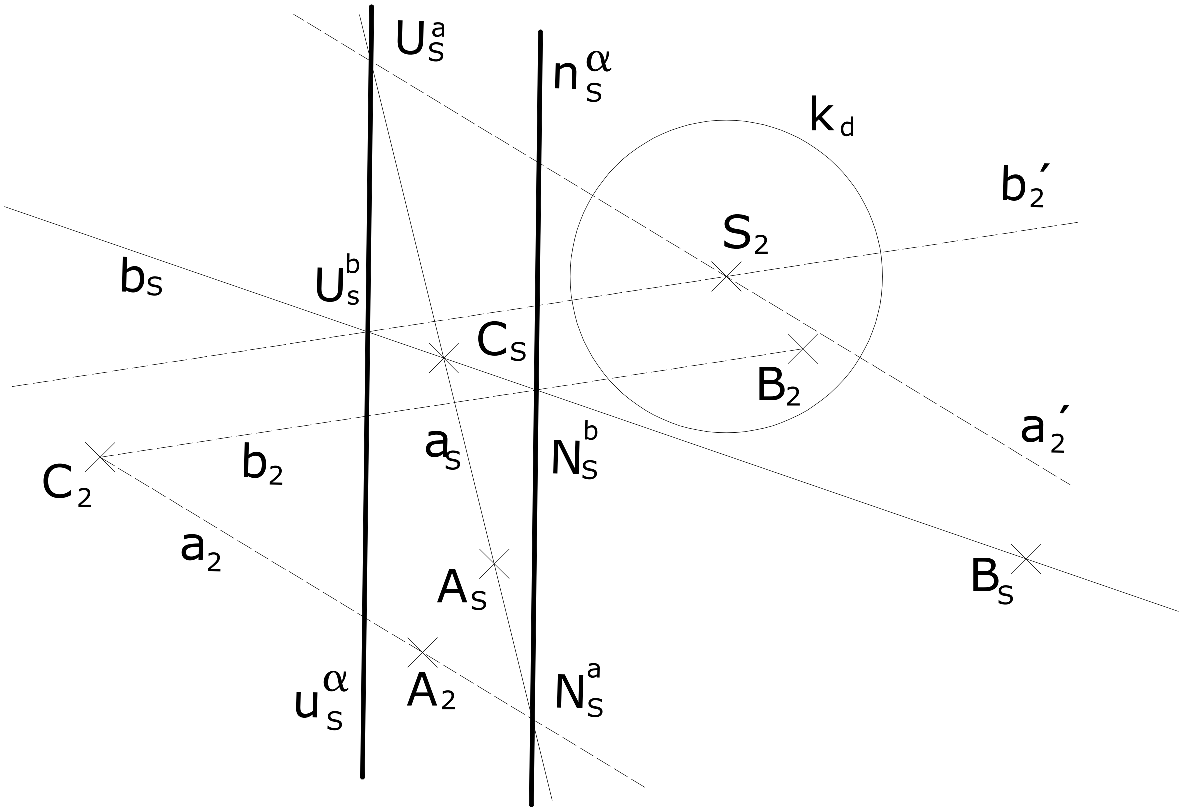
Příklad 9) Určete vzájemnou polohu přímek *a* a *b*. Přímka *a* je zadaná středovým průmětem a protíná přímku SS_2. Přímka *b* je rovnoběžné s průmětnou a je zadaná středovým a pravoúhlým průmětem.



Řešení: Přímky *a, b* jsou určeny podle obrázku a nejsou rovnoběžné. Protože *a* protíná osu SS_2, je S_2 na a_2 a dále *b* je rovnoběžná s průmětnou proto $b_2 \parallel b_S$. Určíme průsečík *M* přímky *b* se středově promítací rovinou přímky *a*. Pak je bod M_S na středovém průmětu b_S přímky *b* a M_2 na pravoúhlém průmětu b_2 přímky *b*. Přímky *a, b* jsou různoběžné, právě když bod *M* bude ležet i na přímce *a.* To zjistíme, když sklopíme kolmou promítací rovinu přímky *a.* Sklopeným bodem *(S)* a úběžníkem U_S přímky vedeme sklopený směrový paprsek přímky *a*. S ním rovnoběžně sklopenou přímku *(a)* stopníkem N_S^a přímky *a.* Dále zjistíme sklopený bod *(M)*. Ten je průsečík přímky *(S)*M_2 a přímky rovnoběžné s S_2*(S)* vedené bodem M_2. Protože sklopený bod *(M)* neleží na sklopené přímce *(a),* neleží ani bod *M* na přímce *a*. Přímky *a*, *b* jsou mimoběžné.

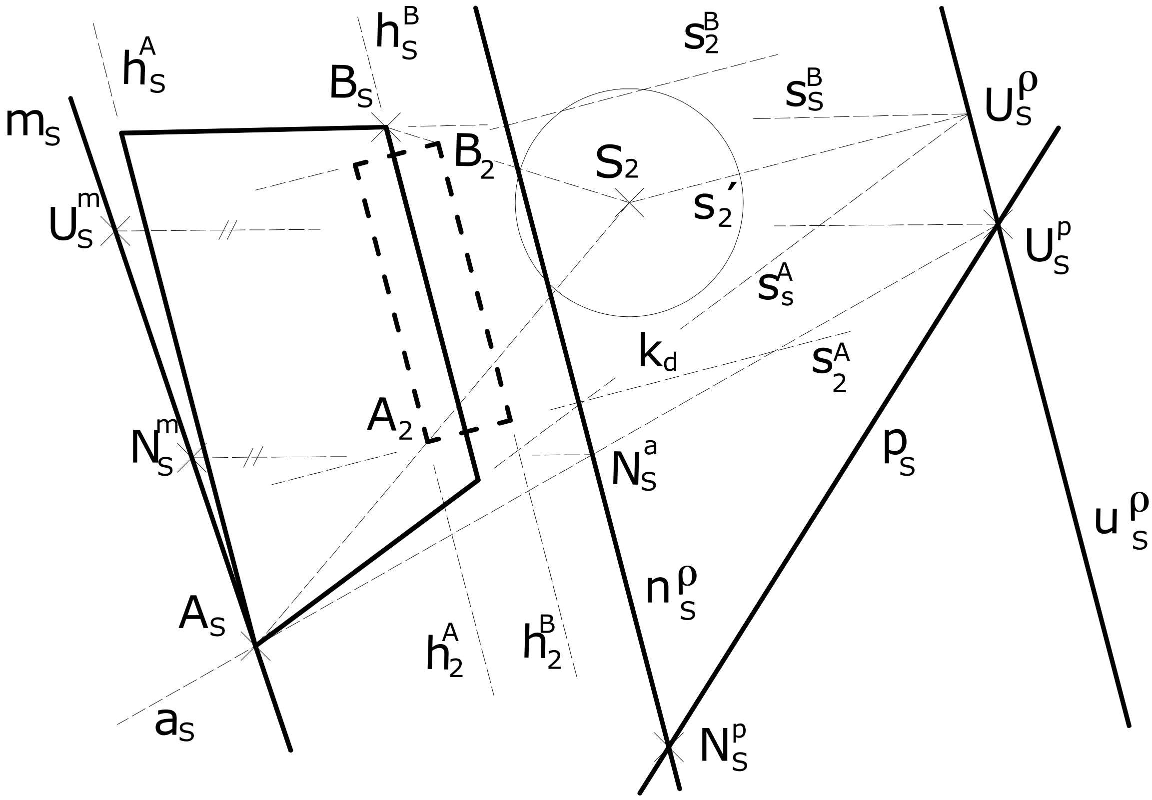
Zobrazení roviny

Příklad 10) Určete stopu a úběžnici roviny α, která je zadána středovými a pravoúhlými průměty bodů A, B, C.



Řešení: Body A, C a body C, B vedeme přímky a, b, které leží v rovině α, přičemž středový průmět a_S je určen body A_SC_S a středový průmět b_S je určen body B_SC_S a pravoúhlé průměty $a_2 = A_2C_2$ a $b_2 = B_2C_2$. Podle úlohy 4a) určíme stopníky N_S^a, N_S^b a úběžníky U_S^a, U_S^b přímek a, b. Stopa n_S^α roviny α je určena stopníky $N_S^aN_S^b$ přímek a, b a úběžnice u_S^α roviny α je určena úběžníky $U_s^aU_S^b$ přímek a, b.

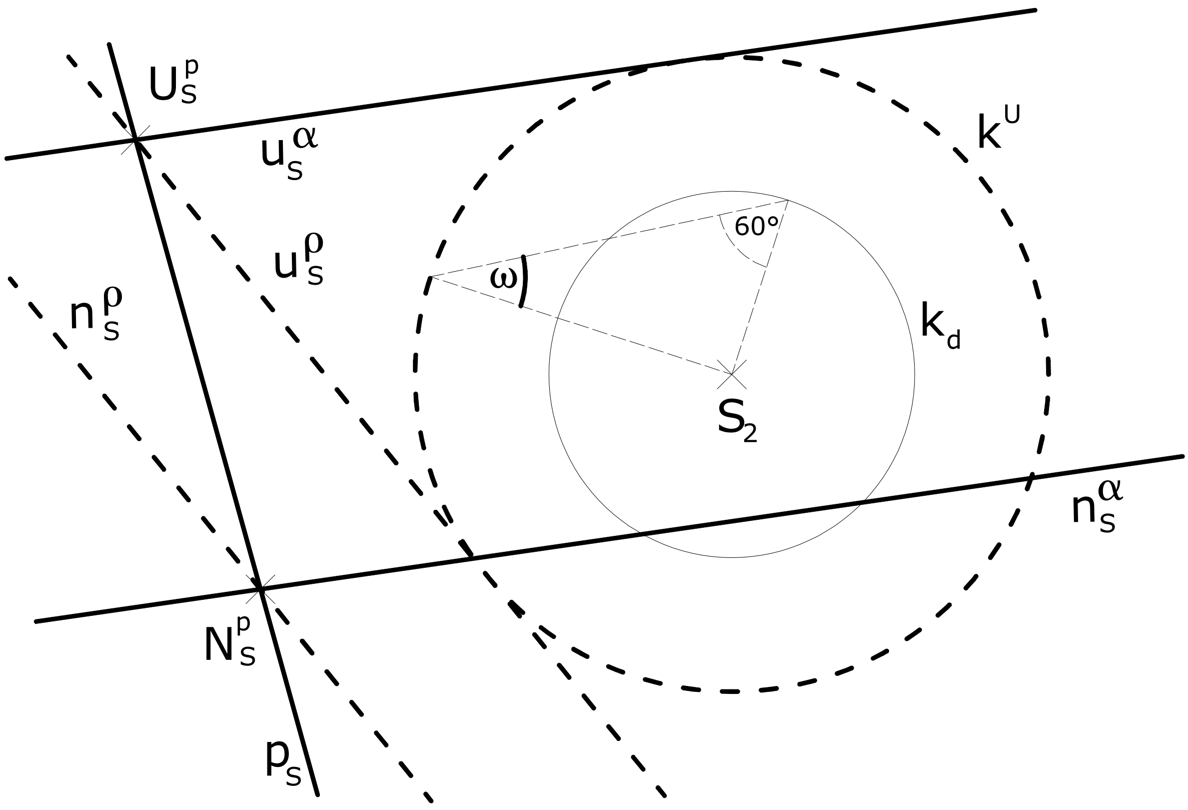
Příklad 11) Určete stopu a úběžnici roviny ρ, která je určena přímou p a bodem A, známe-li středový průmět přímky p a bod A je dán svým středovým průmětem a nositelkou m. Dále v rovině ρ zvolte bod B a sestrojme obdélník o vrcholech A, B, jehož strany leží na hlavních a spádových přímkách roviny ρ.



Řešení: Vedeme-li bodem A přímku a rovnoběžnou s přímkou p, pak přímka a náleží rovině ρ a rovina je určena přímkami a, p. Z rovnoběžnosti víme, že úběžník přímky a je stejný jako úběžník přímky p. Středový průmět $a_S = A_S U_S^p$. Dále přímky a, m mají společný bod A, jsou proto různoběžné a stopníky N_S^a, N_S^m leží na přímce rovnoběžné s přímkou $U_s^m U_S^p$. Stopa roviny prochází stopníky N_S^a a N_S^p přímek a, p. Úběžnice je rovnoběžná se stopou roviny a prochází úběžníkem U_S^p přímky p.

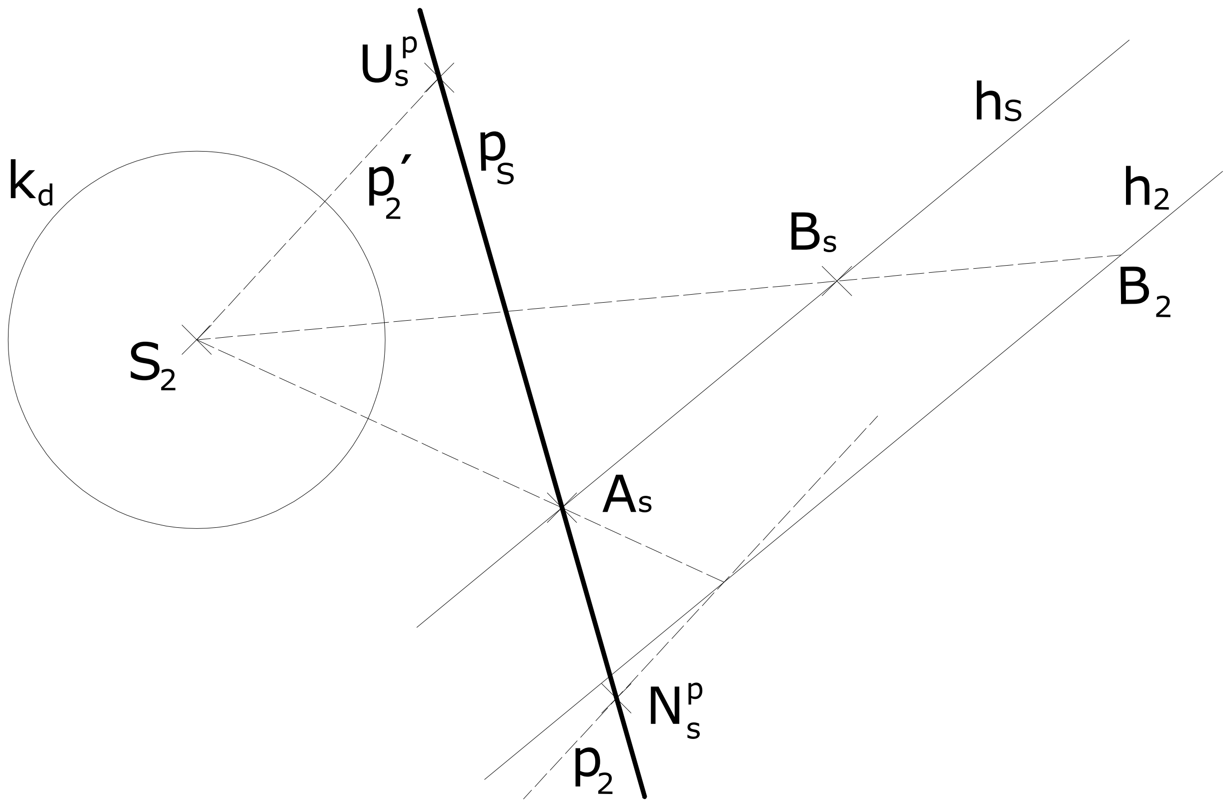
Nyní zvolíme libovolný bod B, který leží v rovině. Sestrojíme hlavní úběžník U_s^ρ všech spádových přímek roviny ρ. Což je průsečík úběžnice roviny a pravoúhlého průmětu s'_2 směrového paprsku, který je kolmý na stopu roviny a prochází bodem S_2. Pro sestrojení středového průmětu obdélníku vedeme spádové přímky s_S^B a s_S^A úběžníkem U_s^ρ a body A_S, B_S. Nyní stačí vést hlavní přímky h_S^A a h_S^B, které jsou rovnoběžné se stopou roviny ρ a prochází body A_S, B_S. Aby byl obdélník určený, musíme sestrojit jeho pravoúhlý průmět. Nejprve sestrojíme pravoúhlé průměty A_2, B_2 bodu A, B. Body leží v rovině a také na spádové přímce, leží tedy jejich pravoúhlé průměty na přímkách s_2^A a s_2^B, které jsou rovnoběžné s pravoúhlým průmětem s'_2 směrového paprsku a prochází průsečíky spádových přímek s_S^B a s_S^A se stopou roviny. Dále body A_2, B_2 leží na ordinálách. Body A_2, B_2 stačí nyní vést pravoúhlé průměty h_2^A a h_2^B hlavních přímek, ty jsou rovnoběžné se stopou.

Příklad 12) Přímkou *p* zadanou stopníkem a úběžníkem veďte rovinu, jejíž odchylka od průmětny je $\omega = 30°$.



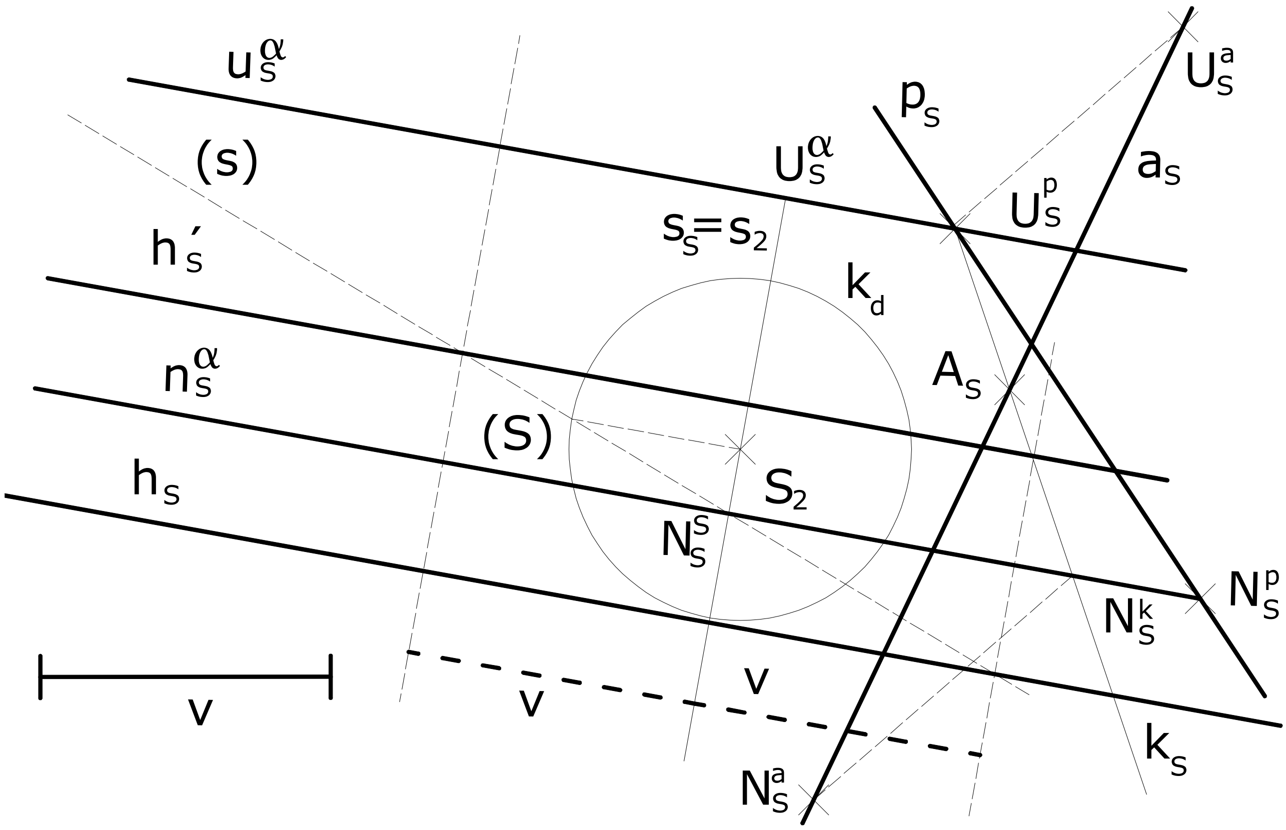
Řešení: Hledáme-li roviny svírající s průmětnou úhel $\omega = 30°$, hledáme kružnici k^U. Na této kružnici leží všechny úběžníky spádových přímek jednotlivých rovin. Tuto kružnici sestrojíme jako v příkladu 7). Tečna u_S^α (resp. u_S^ρ) vedená z úběžníku U_S^p přímky *p* ke kružnici k^U je úběžnice hledané roviny α (resp. ρ), jejíž stopa n_S^α (resp. n_S^ρ) je rovnoběžná s u_S^α (resp. u_S^ρ) a prochází stopníkem N_S^p přímky *p*.

Řešení 13) Rovina ρ rovnoběžná s průmětnou je daná svým bodem A na nositelce p. Určete pravoúhlý průmět bodu B, který leží v rovině ρ, je-li dán středový průmět B_S.



Řešení: Přímka h určená body A, B leží v rovině ρ, je tedy rovnoběžná s průmětnou, a proto $h_S \parallel h_2$. Pomocí nositelky p určíme pravoúhlý průmět A_2 bodu A - viz.příklad 3). Pravoúhlý průmět h_2 přímky p vedeme bodem A_2 rovnoběžně s přímkou h_S . Pravoúhlý průmět B_2 bodu B leží na přímce h_2 a ordinále vedené z hlavního bodu S_2 bodem B_S.

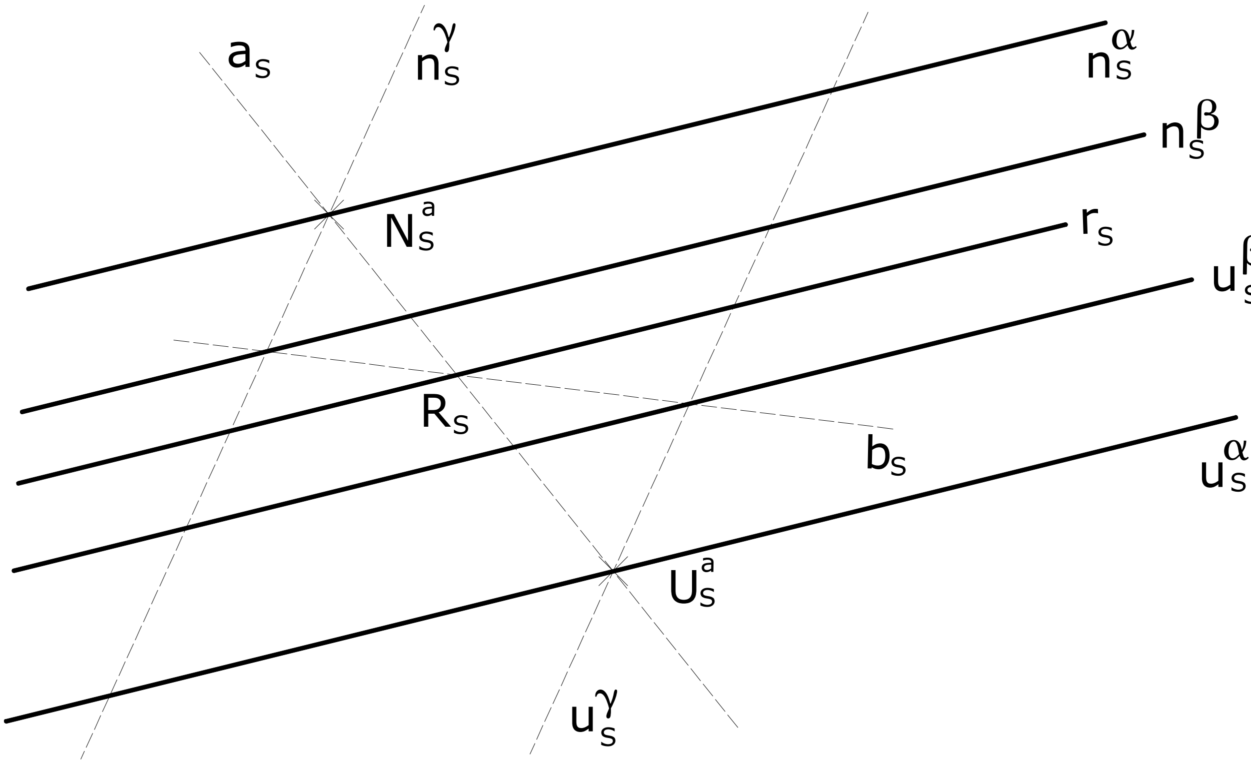
Příklad 14) Sestrojte středový průmět hlavní přímky roviny α, jejíž vzdálenost od průmětny je v. Rovina je zadána středovým a pravoúhlým průmětem přímky p a bodem A na nositelce a.



Řešení: Nejprve sestrojíme stopu a úběžnici roviny α - viz. příklad 11). Pro určení hlavní přímky o vzdálenosti v od průmětny sestrojíme spádovou přímku roviny α, jejíž pravoúhlý průmět s_2 prochází hlavní bodem S_2 . Na spádové přímce s roviny α najdeme bod, který má od průmětny vzdálenost v - viz. příklad 6). Hlavní přímka roviny je rovnoběžná se stopou roviny α. Řešením příkladu jsou hlavní přímky h a h'.

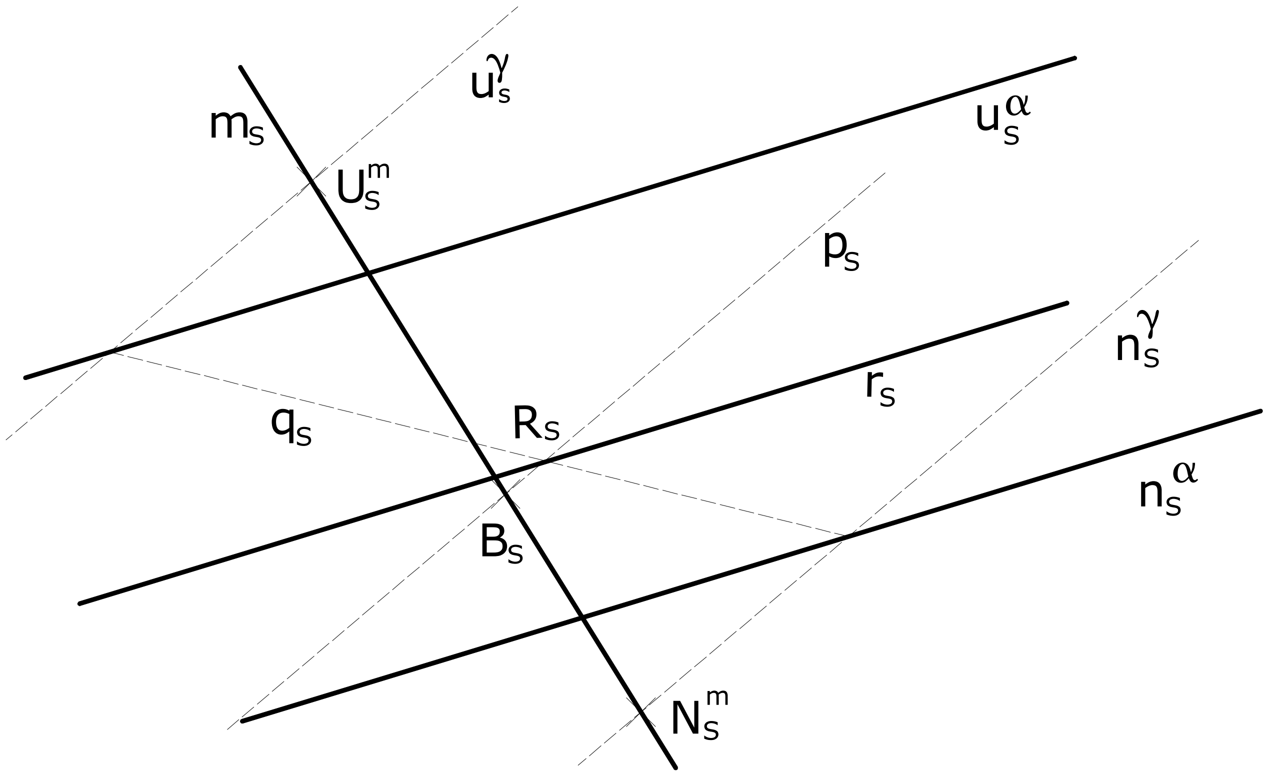
Vzájemná poloha rovin, roviny a přímky, příčka mimoběžek

Příklad 15) Určete průsečnici r různoběžných rovin α, β. Roviny jsou zadány stopami n_S^α, n_S^β tak, že $n^\alpha \parallel n^\beta$ a $u^\alpha \neq u^\beta$.



Řešení: Průsečnice r je hlavní přímka rovin α, β a proto je $r \parallel n_S^\alpha$. Zvolíme libovolnou přímku a_S roviny α. Dále zvolíme rovinu γ, tak aby přímka a ležela v rovině γ a $n_S^\gamma \nparallel n_S^\alpha$. Úběžnice roviny γ musí procházet úběžníkem přímky a a stopa roviny je rovnoběžná s úběžnicí a prochází stopníkem přímky a. Najdeme průsečnici b rovin γ, β. Průsečnice b_S je spojnice průsečíků stop rovin n_S^γ, n_S^β a úběžnic u_S^γ, u_S^β. Protože přímka a leží v rovině γ a přímka b je společná přímka rovin γ, β, jsou přímky a, b různoběžné a průsečík je bod R. Dále přímka a leží v rovině α, je tedy průsečík R přímek a, b společným bodem rovin α, β, a proto leží na průsečnici rovin α, β. Průsečnice r je rovnoběžná se stopou roviny α a prochází bodem R.

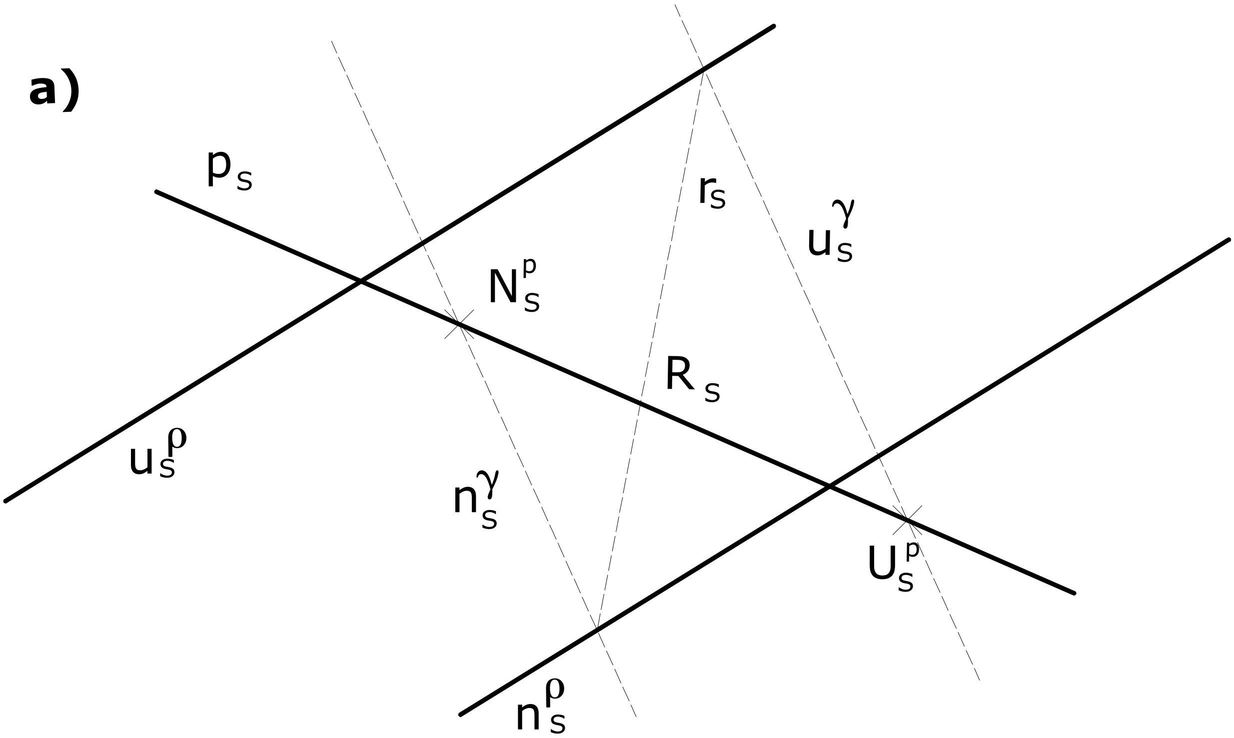
Příklad 16) Určete průsečnice *r* různoběžných rovin *α, β*. Rovina *α* je různoběžná a rovina *β* je rovnoběžná s průmětnou. Rovina *α* je zadaná stopou a úběžnicí a rovina *β* je zadaná svým bodem *B* na libovolné nositelce *m*.



Řešení: Protože je rovina *β* rovnoběžná s průmětnou, je průsečnice *r* rovin *β, α* rovnoběžná s průmětnou a stopou n_S^α. Přímkou *m* vedeme libovolnou rovinu *γ* tak, aby nebyla rovnoběžná s rovinou *β* ani *α*. Stopa roviny *γ* prochází stopníkem přímky *m* a úběžnice je s ní rovnoběžná a prochází úběžníkemm přímky *m*. Najdeme průsečnici *p* rovin *β, γ*. Průsečnice p_S jde bodem B_S a je rovnoběžná se stopou roviny *γ*. Dále sestrojíme průsečnici q_S rovin *γ, α*. Přímka q_S je spojnicí průsečíků stop n_S^γ, n_S^α a u_S^α, u_S^γ. Bod R_S je průsečík přímek *q, p* a leží jak v rovině *β*, tak i v rovině *α*. Je tedy bodem průsečnice těchto rovin a stačí jím vést rovnoběžku *r* se stopou roviny *α*. Dostáváme tak průsečnici *r* rovin *α, β*.

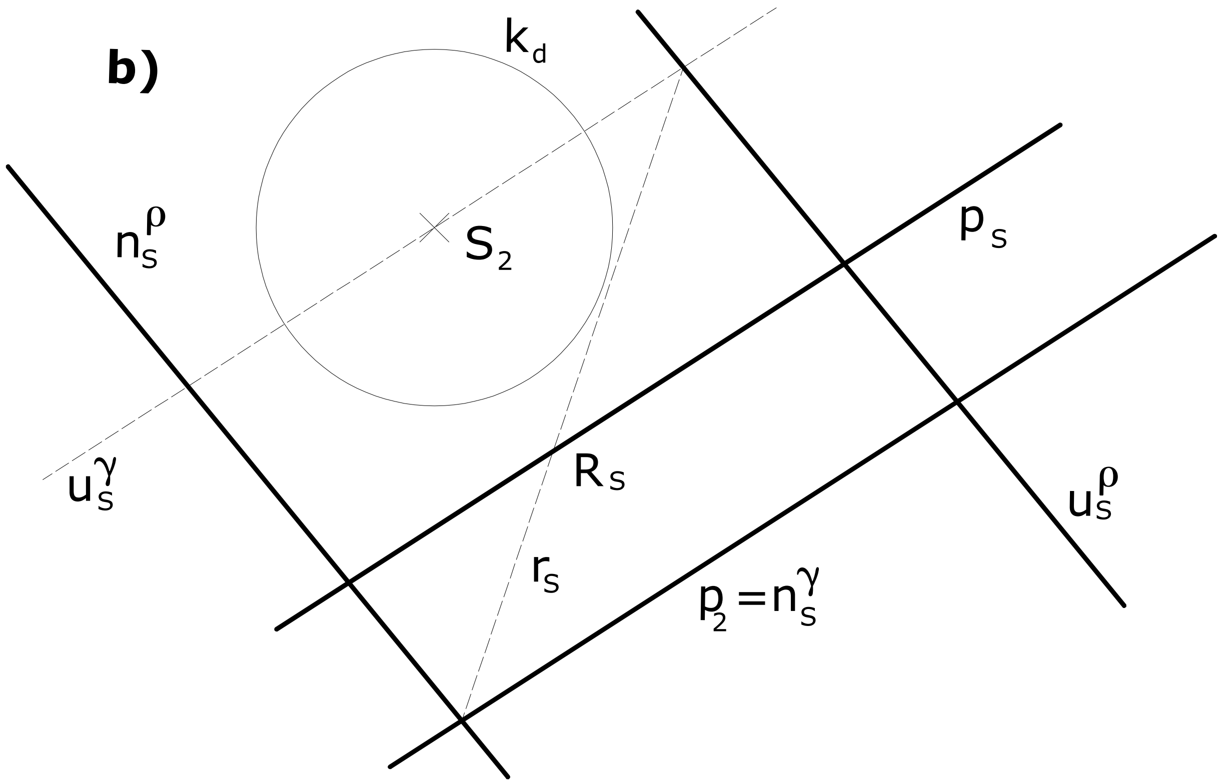
Příklad 17) a) Určete průsečík roviny s přímkou, je-li přímka *p* i rovina *ρ* různoběžná s průmětnou. Přímka je zadaná středovým průmětem a rovina stopou a úběžnicí.

a)



Řešení: Abychom zjistili průsečík přímky *p* s rovinou *ρ*, proložíme přímkou *p* rovinu *γ* a určíme průsečnici rovin *γ* a *ρ*. Stopníkem N_S^p přímky *p* vedeme stopu n_S^γ roviny *γ* a úběžníkem U_S^p přímky *p* vedeme úběžnici $u_S^\gamma \parallel n_S^\gamma$. Průsečnice r_S rovin *γ* a *ρ* je spojnice průsečíku stop rovin $n_S^\gamma n_S^\rho$ a průsečíku úběžnic rovin $u_S^\gamma u_S^\rho$. Přímky p_S a r_S jsou různoběžné a průsečík přímek R_S je hledaným průsečíkem roviny *ρ* s přímkou *p*.

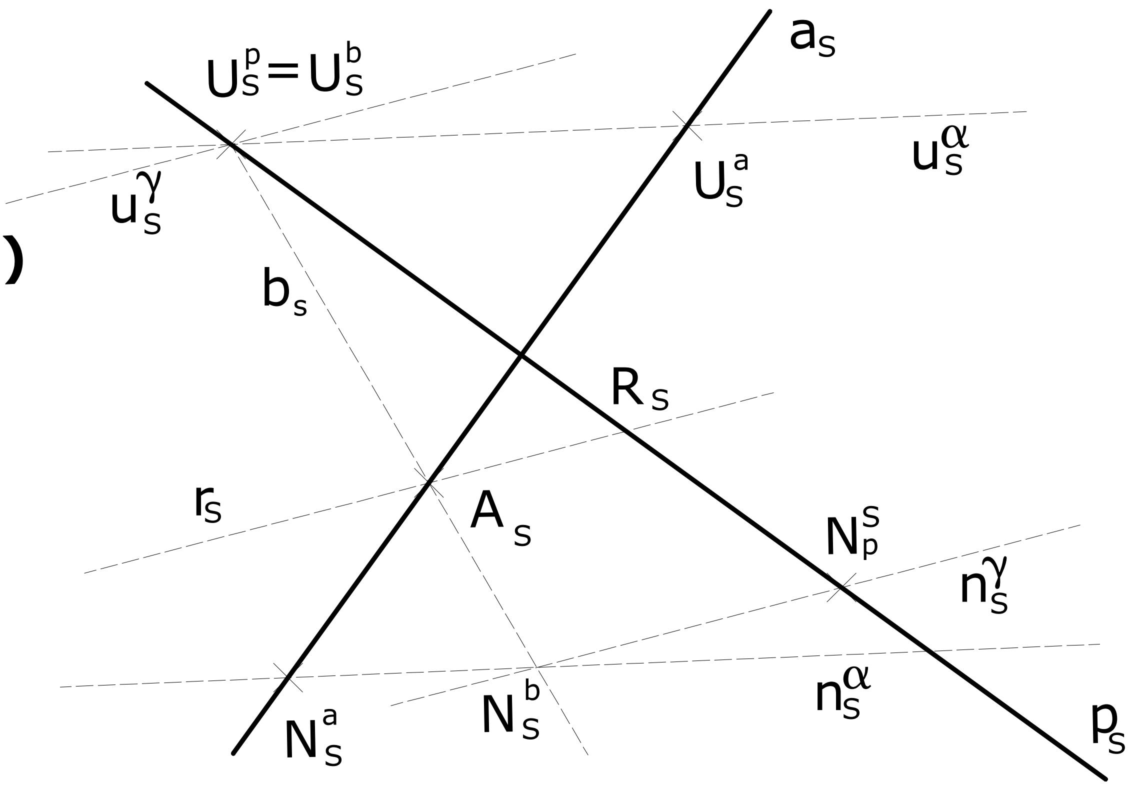
b) Určete průsečík roviny *a* a přímky, je-li přímka *p* rovnoběžná s průmětnou a rovina je s průmětnou různoběžná. Rovina je zadaná stopou a úběžnicí a přímka středovým a pravoúhlým průmětem.



Řešení: Postupujeme podobně jako v případě a). Přímkou *p* je rovnoběžná s průmětnou, proto jí proložíme rovinu γ kolmou k průmětně. Stopa roviny n_S^{γ} bude totožná s pravoúhlým průmětem p_2 přímky *p*. Protože je rovina γ kolmá k průmětně prochází její úběžnice u_S^{γ} hlavním bodem S_2 a je rovnoběžná se stopou n_S^{γ}. Nyní najdeme průsečnici *r* a průsečík *R* stejně jako v případě a).

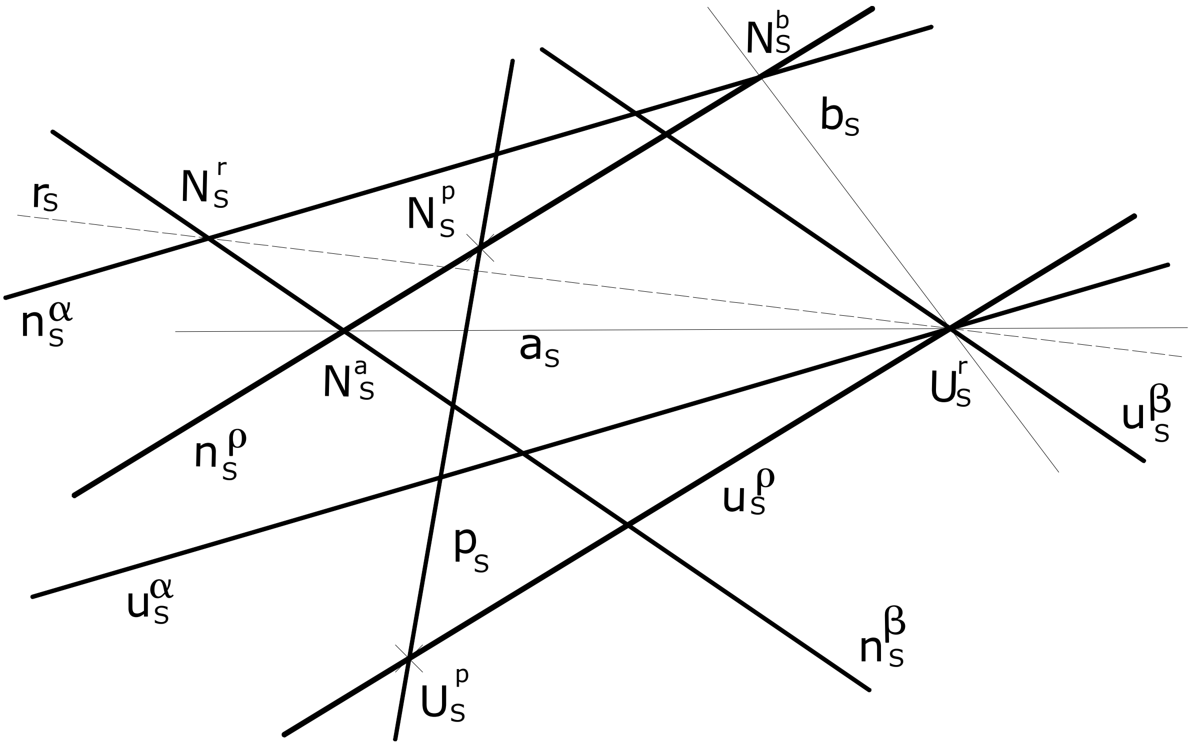
c) Určete vzájemnou polohu přímky a roviny, je-li rovina ρ rovnoběžná s průmětnou a přímka p různoběžná s rovinou. Přímka je zadaná středovým průmětem a rovina bodem na libovolné nositelce.

c)



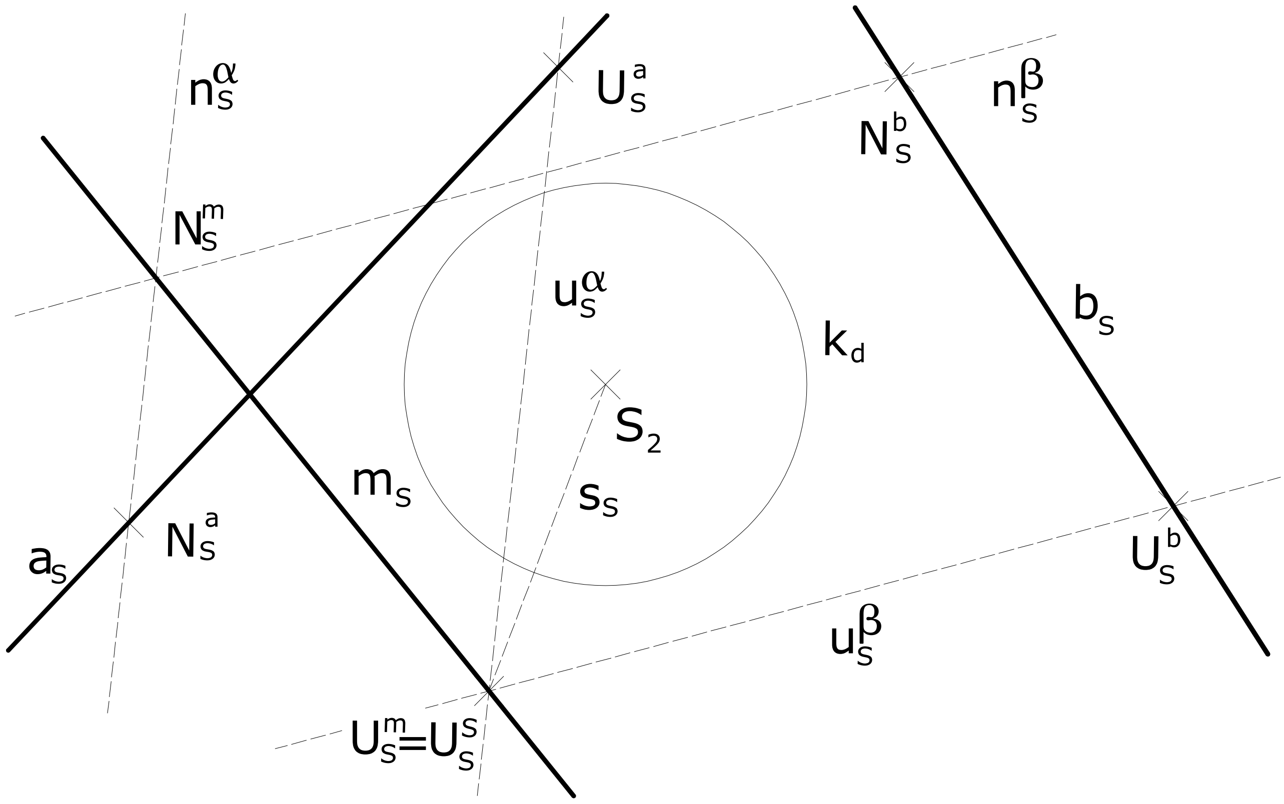
Řešení: Abychom zjistili průsečík přímky p a roviny ρ, proložíme přímkou p rovinu γ, která je určená přímkou p a bodem A. Najdeme průsečnici r a průsečík R. Bodem A vedeme rovnoběžku b s přímkou p. Středový průmět b_S přímky b prochází bodem A_S a z rovnoběžnosti s přímkou p prochází úběžníkem U_S^p. Pro zjištění stopníku N_S^b přímky b_S, proložíme přímkami b, a rovinu α tak, že úběžnice prochází body $U_S^p U_S^a$ a stopa je s ní rovnoběžná a prochází stopníkem N_S^a přímky a. Stopník N_S^b je průsečík přímky b_S a stopy n_S^α. Přímkou p a b máme určenou rovinu γ, její stopa n_S^γ prochází stopníky $N_S^p N_S^b$ a úběžnice je rovnoběžná se stopou a prochází úběžníkem U_S^P přímky p. Průsečnice r_S rovin γ, ρ prochází bodem A_S a je rovnoběžná se stopou roviny γ. Hledaný bod R_S je průsečík přímek r_S, p_S.

Příklad 18) Přímkou p veďte rovinu ρ, která protíná roviny α, β v rovnoběžkách. Přímka p je zadaná středovým průmětem a je různoběžná s rovinami α, β a s průmětnou. Roviny α, β jsou zadané svými stopami a úběžnicemi.



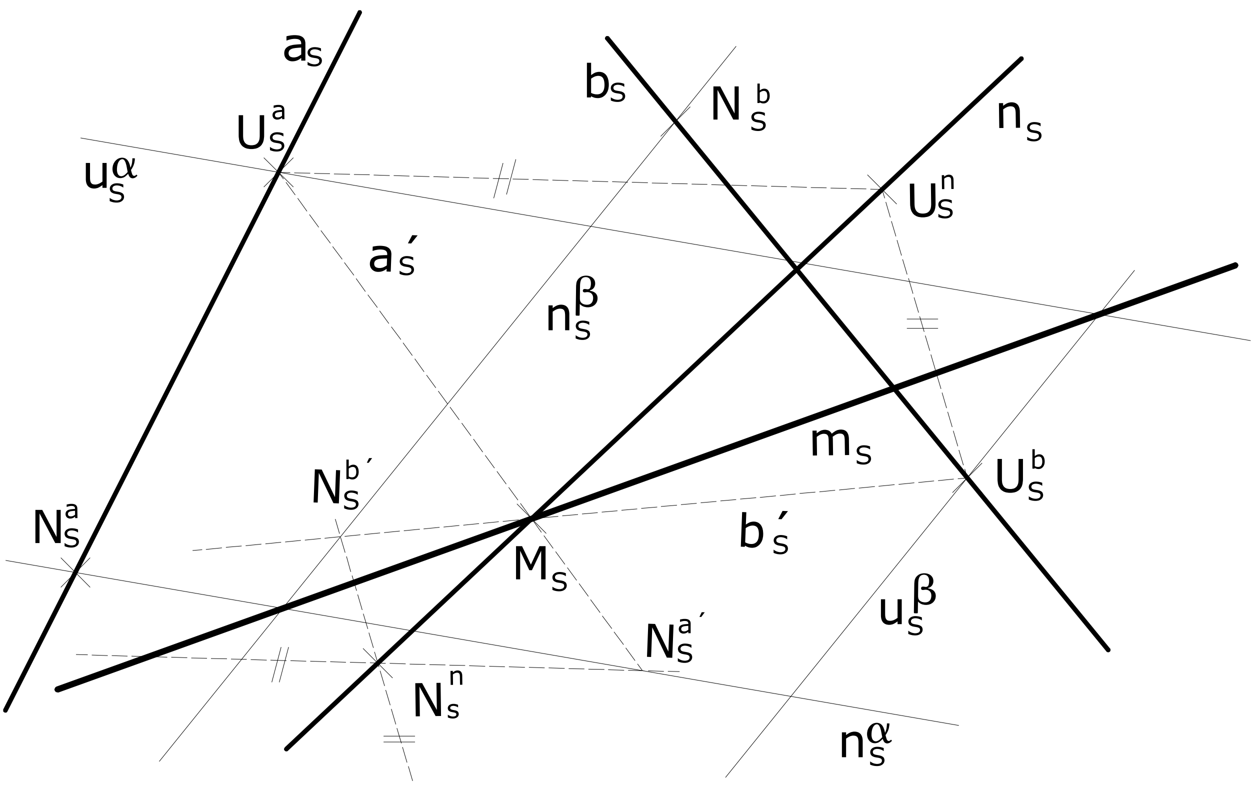
Řešení: Roviny α, β jsou různoběžné a existuje tedy průsečnice r. Středový průmět průsečnice r_S je spojnice průsečíku stop n_S^α, n_S^β a průsečíku u_S^α, u_S^β. Rovina ρ, která protíná roviny α, β v rovnoběžných přímkách je rovnoběžná s průsečnicí r. To znamená, že úběžnice u_S^ρ je spojnicí úběžníků U_S^p, U_S^r. Stopa roviny ρ prochází stopníkem N_S^p a je rovnoběžná s úběžnicí u_S^ρ. Přímky a_S a b_S jsou průsečnice rovin ρ, β a rovin α, ρ a jsou rovnoběžné, neboť procházejí společným úběžníkem U_S^r.

Příklad 19) Určete příčku m mimoběžek a, b určenou směrem s. Mimoběžky jsou zadány stopníky a úběžníky.



Řešení: Přímkou a proložíme rovinu α, určenou přímkou a a směrem příčky s. Úběžnice u_S^α roviny α je určena úběžníky U_S^s, U_S^a a stopa n_S^α je rovnoběžná s úběžnicí u_S^α a prochází stopníkem N_S^a přímky a. Stejným způsobem proložíme přímkou b rovinu β, určenou přímkou b a směrem příčky s. Hledaná příčka m je průsečnice rovin α, β. Středový průmět m_S příčky je spojnice průsečíku stop n_S^α, n_S^β a průsečíku úběžnic u_S^α, u_S^β.

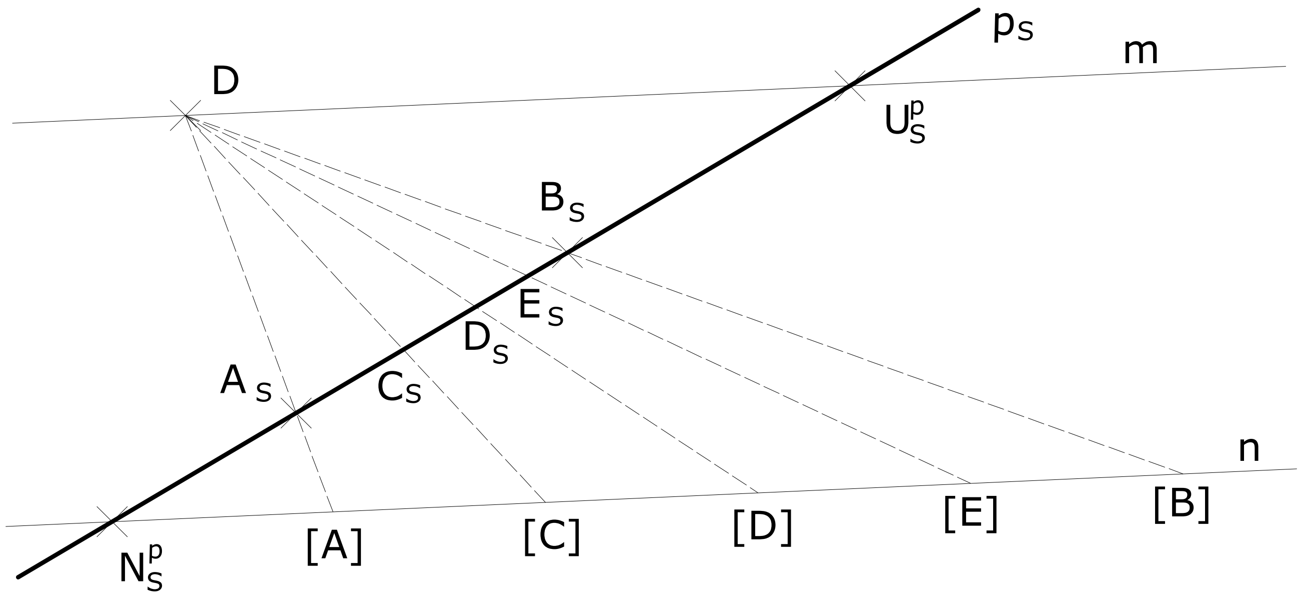
Příklad 20) Bodem *M* veďte příčku *m* mimoběžek *a, b*. Bod *M* je zadán na nositelce *n*. Mimoběžky jsou zadány stopníky a úběžníky.



Řešení: Hledaná příčka *m* mimoběžek *a, b* je průsečnice rovin *α, β*. Rovina *α* je určena přímkou *a* a bodem *M*. Rovina *β* je určena přímkou *b* a bodem *M*. Tyto roviny sestrojíme jako v příkladu 11). A průsečnici (příčku) *m* rovin najdeme stejným způsobem jako v předcházejícím příkladu.

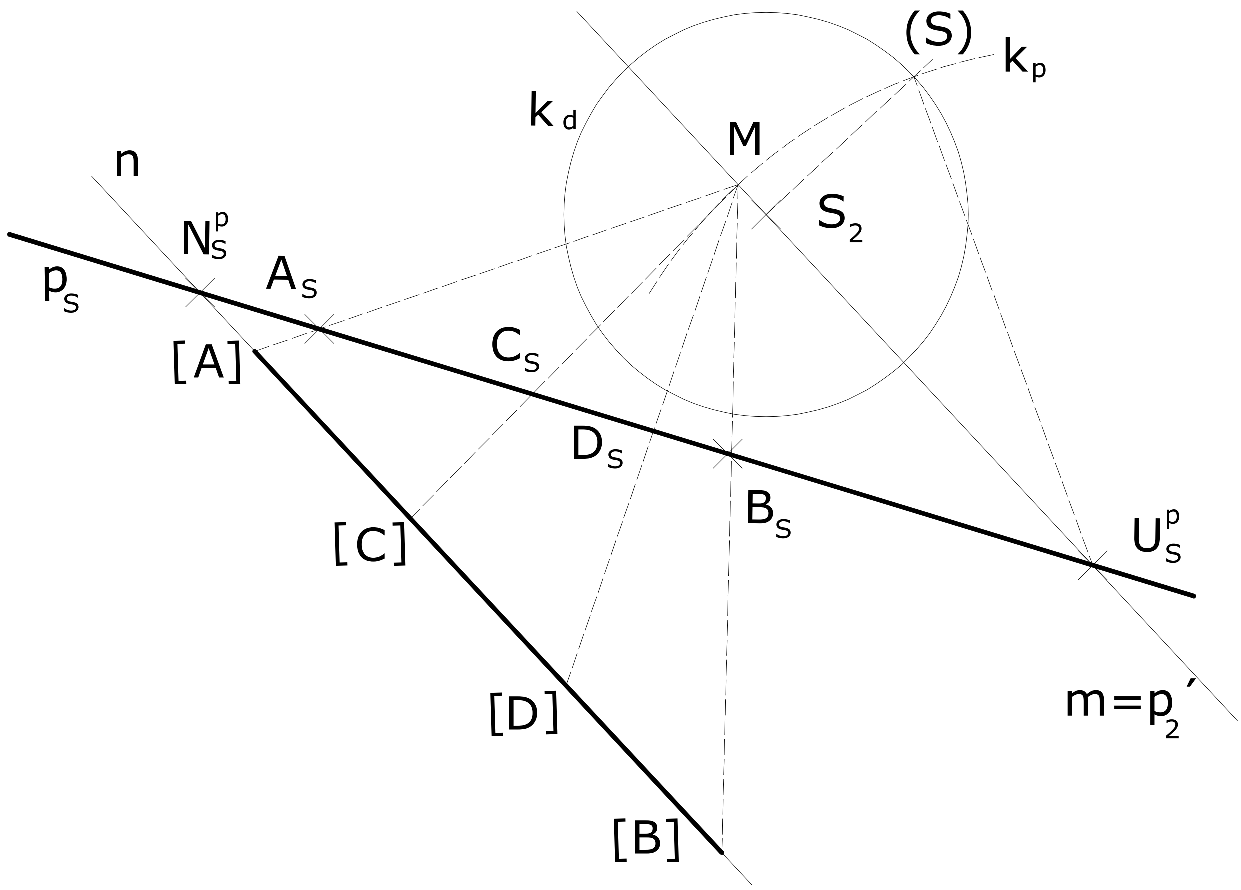
Metrické úlohy, osa mimoběžek

Příklad 21) Rozdělte úsečku *AB* na čtyři stejné části. Body *A*, *B* leží na přímce *p*.



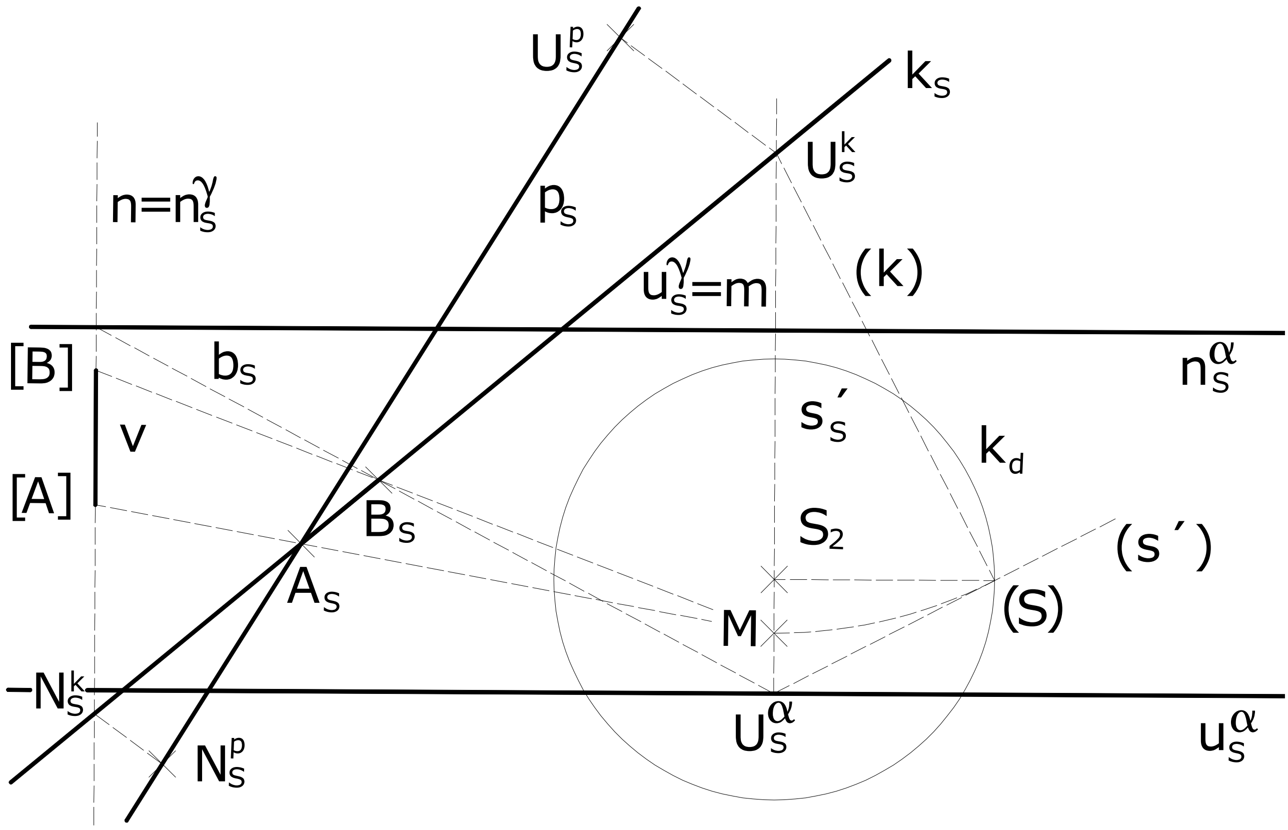
Řešení: Přímkou *p* proložíme libovolnou rovinu, jejíž úběžnici označíme *m* a stopu *n*. Zvolíme libovolný bod $D \neq U_S^p$ jako směr rovnoběžného promítání. Při něm se promítnou body A_S, B_S na p_S do bodů *[A]*, *[B]* na *n*. Úsečka *AB* byla promítnuta do úsečky *[A][B]* v průmětně. Protože se dělící poměr při rovnoběžném promítání zachovává, stačí úsečku *[A][B]* rozdělit na čtyři stejně dlouhé části a body *[C]*, *[D]*, *[E]* promítnout z bodu *D* na p_S. Bod *D* je tzv. dělící bod.

Příklad 22) Určete skutečnou velikost úsečky *AB* a rozdělte ji na tři stejné části. Body *A, B* leží na přímce *p*.



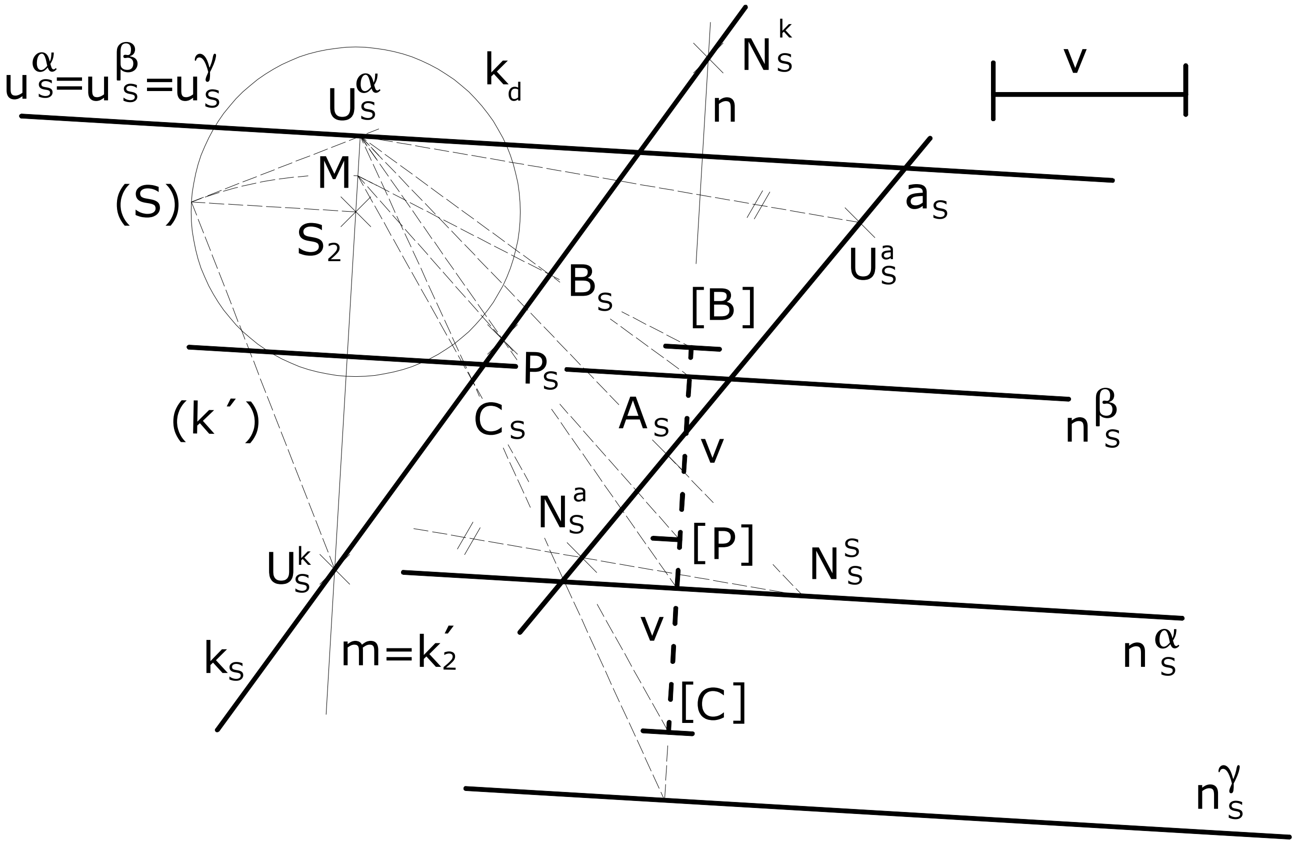
Řešení: Skutečnou velikost úsečky *AB* zjistíme pomocí konstrukce dělící kružnice. Body U_S^p, S_2 vedeme přímku *m*, ta odpovídá pravoúhlému průmětu směrové přímky *p´* a je to libovolný úběžník nějaké roviny. Stopa této roviny *n* bude procházet bodem N_S^p a bude rovnoběžná s přímkou *m*. Sestrojíme dělící kružnici k_p, střed má v bodě U_S^p a poloměr odpovídá úsečce $U_S^p(S)$. Bod *(S)* je sklopený střed promítání do průmětny. Průsečík přímky *m* a kružnice k_p je bod *M*, tzv. měřící bod. Nyní stačí promítnou body A_S , B_S na přímku *n* z bodu *M*. Velikost *[A][B]* je skutečná velikost úsečky *AB*. Dále úsečku *[A][B]* rozdělíme na tři stejné části – viz. příklad 21), za dělící bod *D* volíme bod *M*.

Příklad 23) Zjistěte vzdálenost *v* bodu *A* od roviny *α*. Bod *A* je zadán na nositelce *p* a rovina je určena stopou a úběžnicí.



Řešení: Vzdálenost *v* bodu *A* od roviny zjistíme tak, že vedeme kolmici *k* bodem *A* k rovině *α*. Najdeme průsečík *B* kolmice a roviny, vzdálenost bodu od roviny převedeme na určení velikosti úsečky *AB*. Abychom sestrojili kolmici *k*, potřebujeme sestrojit úběžník U_S^k všech kolmic k rovině *α*. Kolmice na rovinu je kolmá na spádovou přímku roviny procházející patou kolmice. Sklopíme směrový paprsek *s´* všech spádových přímek roviny *α* do průmětny. Směrový paprsek k´ kolmic na rovinu musí být kolmý k směrovému paprsku spádových přímek. Sestrojíme kolmici *(k)* k přímce *(s´)*. Průsečík přímky $s_S´$ a *(k)* je úběžník U_S^k všech kolmic k rovině *α*. Hledaná kolmice k_S prochází bodem A_S a úběžníkem U_S^k. Protože bod *A* je společným bodem přímek *k* a *p*, jsou tyto přímky různoběžné a platí, že přímky $U_S^k U_S^p \parallel N_S^p N_S^p$. Stopník N_S^k kolmice *k* je průsečík přímky rovnoběžné s přímkou $U_S^k U_S^p$ vedené bodem N_S^p. Průsečík *B* kolmice *k* a roviny *α* sestrojíme jako v příkladu 17). Velikost úsečky *AB* zjistíme pomocí dělící kružnice - viz. příklad 22).

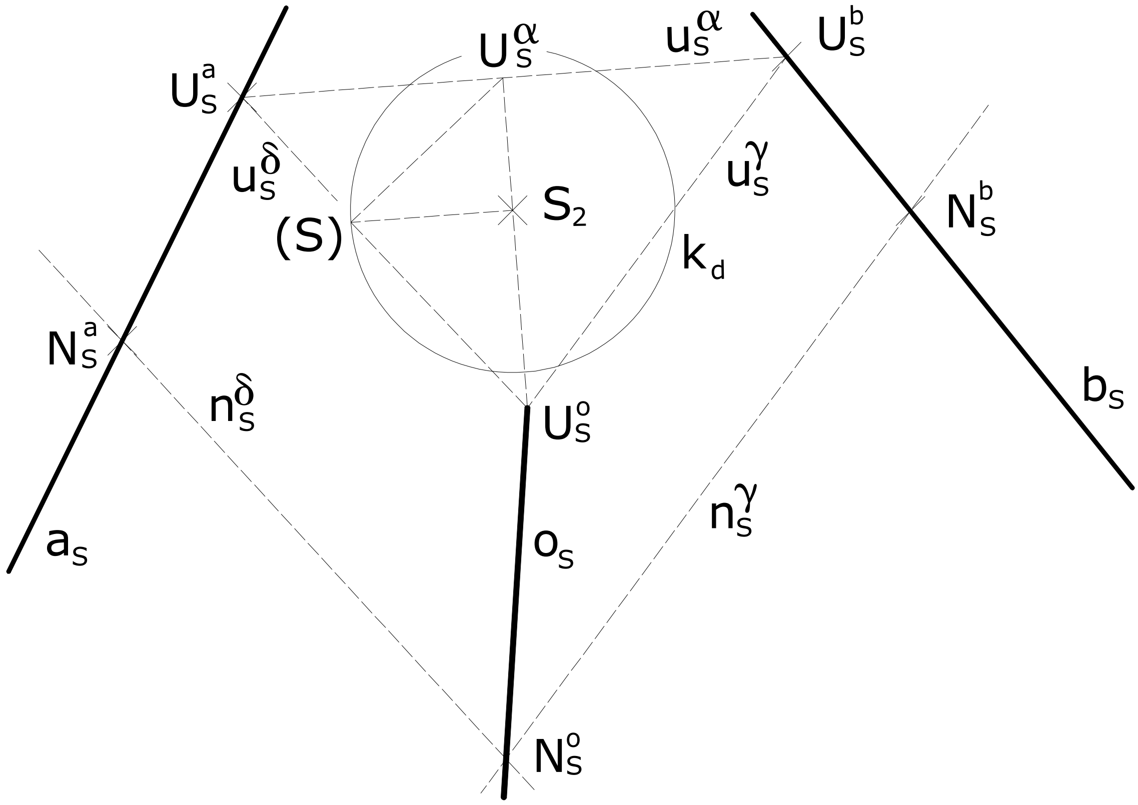
Příklad 24) Bodem A veďte rovinu α kolmou k přímce k a ve vzdálenosti v veďte rovnoběžnou rovinu s rovinou α. Bod A je zadán na nositelce a a přímka k je daná úběžníkem a stopníkem.



Řešení: Rovinu α sestrojíme, tak že najdeme úběžník všech spádových přímek U_S^α. Platí, že kolmice k rovině je kolmá ke spádové přímce, proto sestrojíme sklopenou směrovou přímku *(k´)*. Přímka *(k´)* prochází sklopeným bodem *(S)* a úběžníkem U_S^k. Sklopená směrová přímka spádové přímky roviny α je kolmá na *(k´)*. Průsečík pravoúhlého průmětu směrové přímky k_2' a sklopené směrové spádové přímky je úběžník U_S^α. Úběžnice roviny α prochází úběžníkem U_S^α a je kolmá na směrový paprsek spádové přímku $k'_2 = s'_2$. Dále bod A leží v rovině α, vedeme jím spádovou přímku roviny. Bod A leží i na přímce a. Stopník spádové přímky určíme pomocí různoběžnosti přímky a a spádové přímky - viz. příklad 8). Stopa roviny α je rovnoběžná s úběžnicí a prochází stopníkem N_S^s .

Roviny rovnoběžné s rovinou α ve vzdálenosti v, mají společnou úběžnici $u_S^\alpha = u_S^\beta = u_S^\gamma$. Určíme průsečík P přímky k s rovinou α - viz. příklad 17). Body C, D ve vzdálenosti v od paty P kolmice k leží v hledaných rovinách. Tyto body najdeme obdobně jako v příkladu 22) a 23) pomocí dělící kružnice. Stopy rovin sestrojíme stejně jako stopu roviny α, máme vždy spádovou přímku procházející daným bodem a s ní různoběžnou přímku k. Hledanými rovinami jsou roviny β a γ.

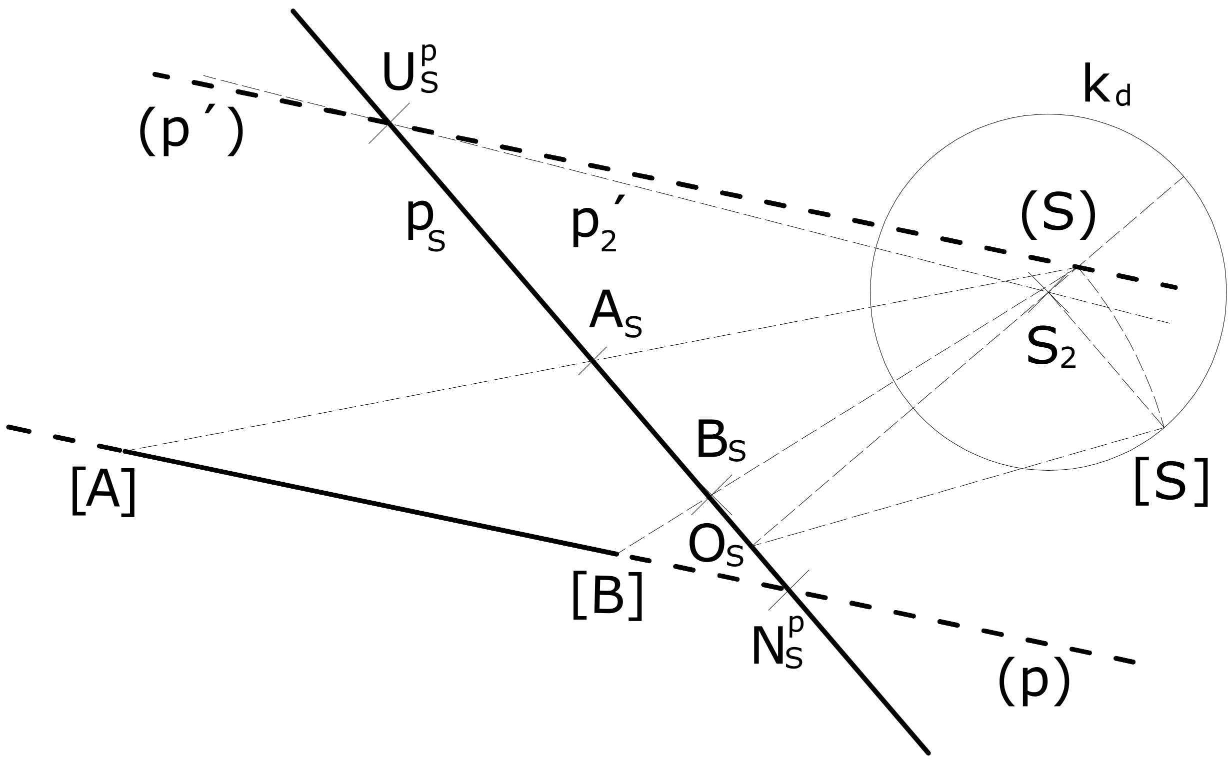
Příklad 25) Sestrojte osu mimoběžek *a* a *b*. Mimoběžky jsou zadány stopníky a úběžníky.



Řešení: Osa mimoběžek *o* je kolmá k oběma přímkám *a, b*. Úběžníky U_s^a, U_S^b přímek *a, b* určují úběžnici roviny $\alpha \parallel a, b$. Dále osa *o* je kolmá na rovinu α. Sestrojíme úběžnici U_S^o kolmic k rovině α viz. příklad 23). Tento úběžník U_S^o je úběžník hledané osy *o*. Osa mimoběžek *a, b* je průsečnice rovin γ, δ. Rovina γ je určena přímkou *b* a osou mimoběžek *o* a roviny δ je určena přímkou *a* a *o*. Úběžnici u_S^γ prochází úběžníky U_S^o, U_S^b a úběžnice u_S^δ prochází úběžníky $U_S{}^o$, U_S^a. Stopy jsou rovnoběžné s úběžnicemi rovin a prochází stopníky přímek *a, b*. Průsečík N_S^o stop rovin γ, δ je stopník hledané osy mimoběžek.

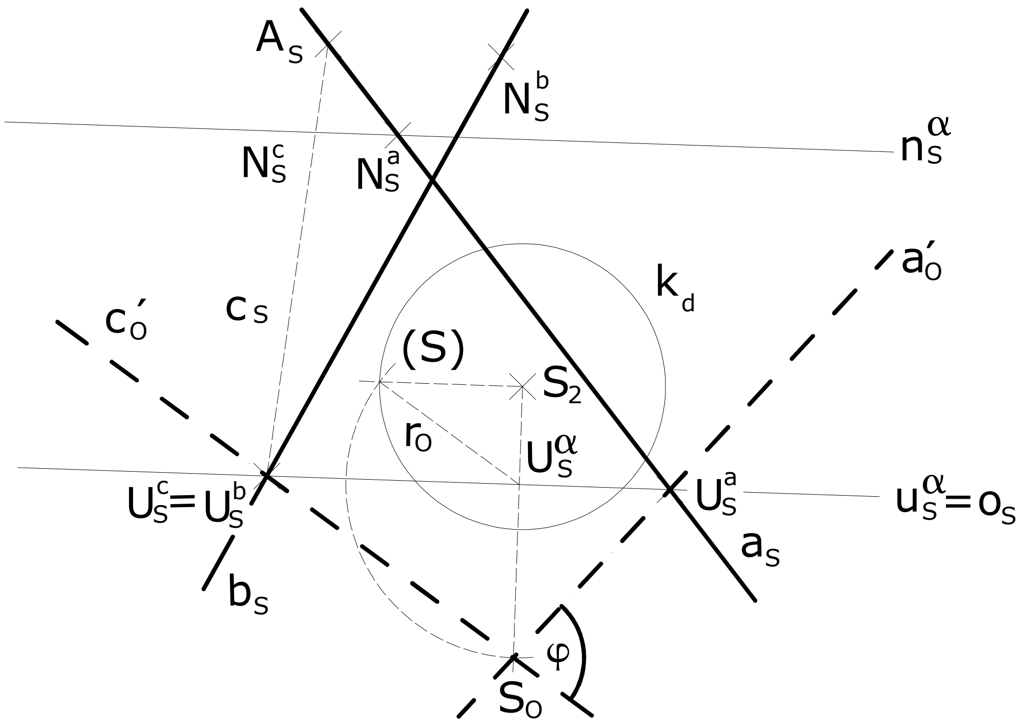
Otáčení roviny do průmětny, útvary v rovině

Příklad 26) Určete skutečnou velikost úsečky *AB* otočením roviny. Body *A*, *B* leží na přímce *p*, která je zadaná stopníkem a úběžníkem.



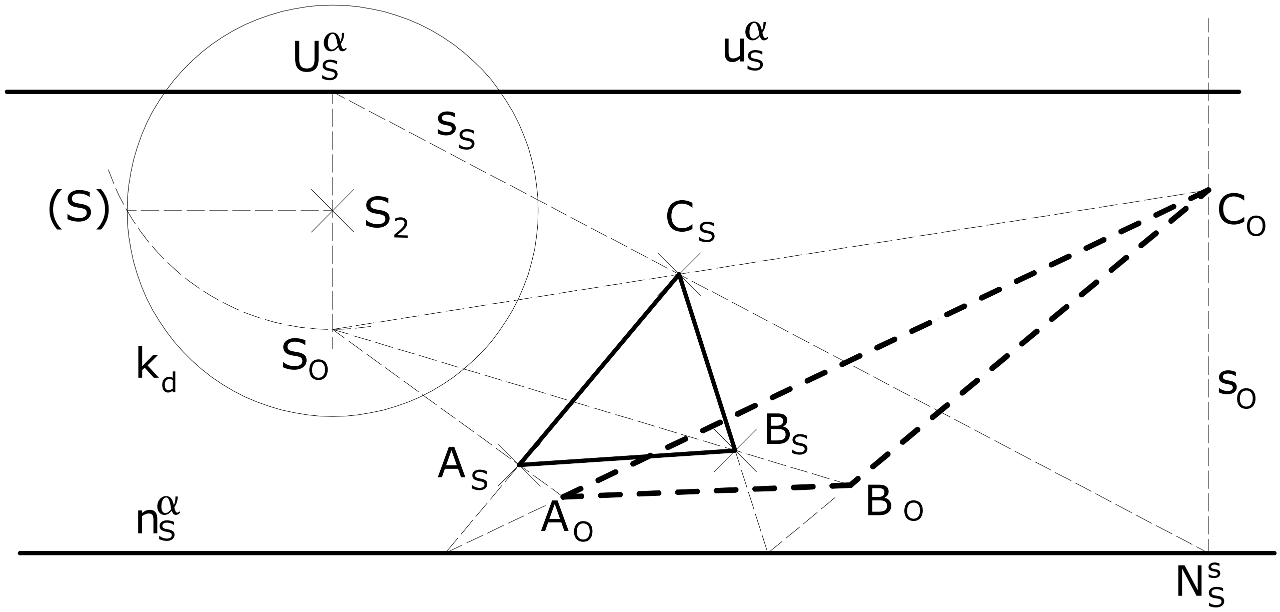
Řešení: Přímka *p* a střed promítání *S* nám určují středově promítací rovinu. Tu otočíme kolem její stopy p_S do průmětny. Otočíme bod *S* do bodu *(S)*. Protože známe kótu bodu *S*, což je vzdálenost *d* středu *S* od průmětny, můžeme použít postupu používaného v kótovaném promítání. Určíme střed otáčení O_S, ten leží na stopě, tedy na přímce p_S, a na kolmici z bodu S_2 k přímce p_S . Najdeme bod *[S]*, stačí sklopit bod S_2 kolem přímky S_2O_S. Bod *(S)* leží na přímce $S_2\,O_S$ a na kružnici o poloměru $O_S[S]$ a středu v bodě O_S. Směrová přímka *p´* přímky *p* prochází středem promítání, její pravoúhlý průmět je určený úběžníkem U_S^p a hlavním bodem S_2. Přímka *p´* se otočí do přímky *(p´)*, která je určená bodem *(S)* a úběžníkem U_S^p. Dále platí $p \parallel p´$ a tedy otočená přímka $(p) \parallel (p´)$ a prochází stopníkem N_S^p. Jestliže z bodu *(S)* promítneme body A_S, B_S do bodů *[A]*, *[B]* přímky *(p)*, pak hledaná velikost úsečky *AB* se rovná velikosti úsečky *[A][B]*.

Příklad 27) Určete odchylku mimoběžek *a, b*. Přímky jsou zadány úběžníky a stopníky.



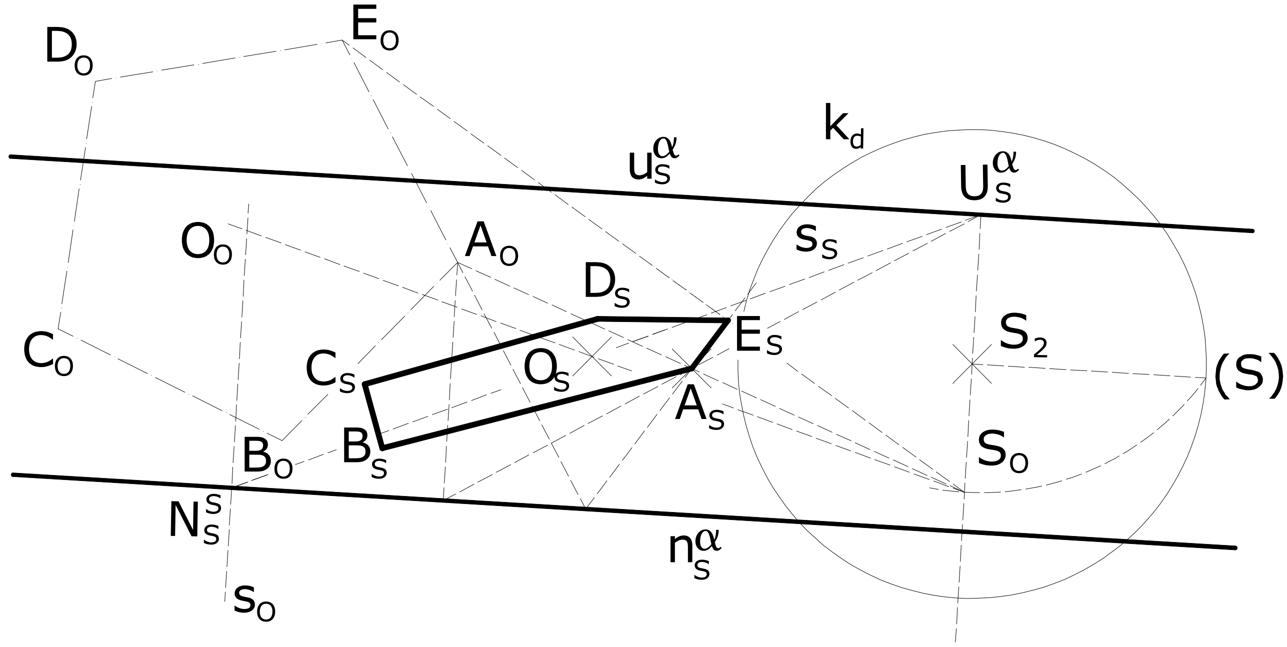
Řešení: Abychom zjistili odchylku mimoběžek, převedeme úlohu na odchylku různoběžek a to tak, že zvolíme na přímce *a* libovolný bod *A* a vedeme jím rovnoběžku *c* s přímkou *b*. Přímky *a*, *c* nám určují rovinu *α*. Otočíme směrovou rovinu *α´*. *S*tačí zjistit otočené směrové přímky *a´* a *c´* a odchylka těchto přímek je stejná jako odchylka mimoběžek *a*, *b*. Přímka c_S prochází středovým průmětem A_S bodu *A* a úběžníkem U_S^b, neboť přímky *b* a *c* jsou rovnoběžné. Úběžnice roviny *α* je určena spojnicí úběžníků U_S^b, U_S^a a stopa roviny je rovnoběžná s úběžnicí a prochází stopníkem N_S^a přímky *a*. Při otáčení roviny se využívá středová kolineace. Středem kolineace je bod S_O, ten sestrojíme tak, že sklopíme bod S_2 do průmětny. Středem otočení je hlavní úběžník U_S^α a poloměr odpovídá velikosti úsečky $U_S^\alpha S_O$. Bod S_O je průnik kružnice $l = (U_S^\alpha, r_O = U_S^\alpha(S))$ a přímky $S_2U_S^\alpha$. Osou kolineace směrové roviny je úběžnice roviny α. Protože na ose leží úběžníky přímek *a*, *c*, jsou tyto body samodružné. Směrové přímky procházejí středem promítání, proto otočené směrové přímky procházejí bodem S_O a svými úběžníky. Dostáváme tak otočené směrové přímky a_O' a c_O'. Ty svírají odchylku *φ*.

Příklad 28) V rovině α je dán trojúhelník ABC svým středovým průmětem. Určete jeho skutečnou velikost. Rovina je daná stopou a úběžnicí.



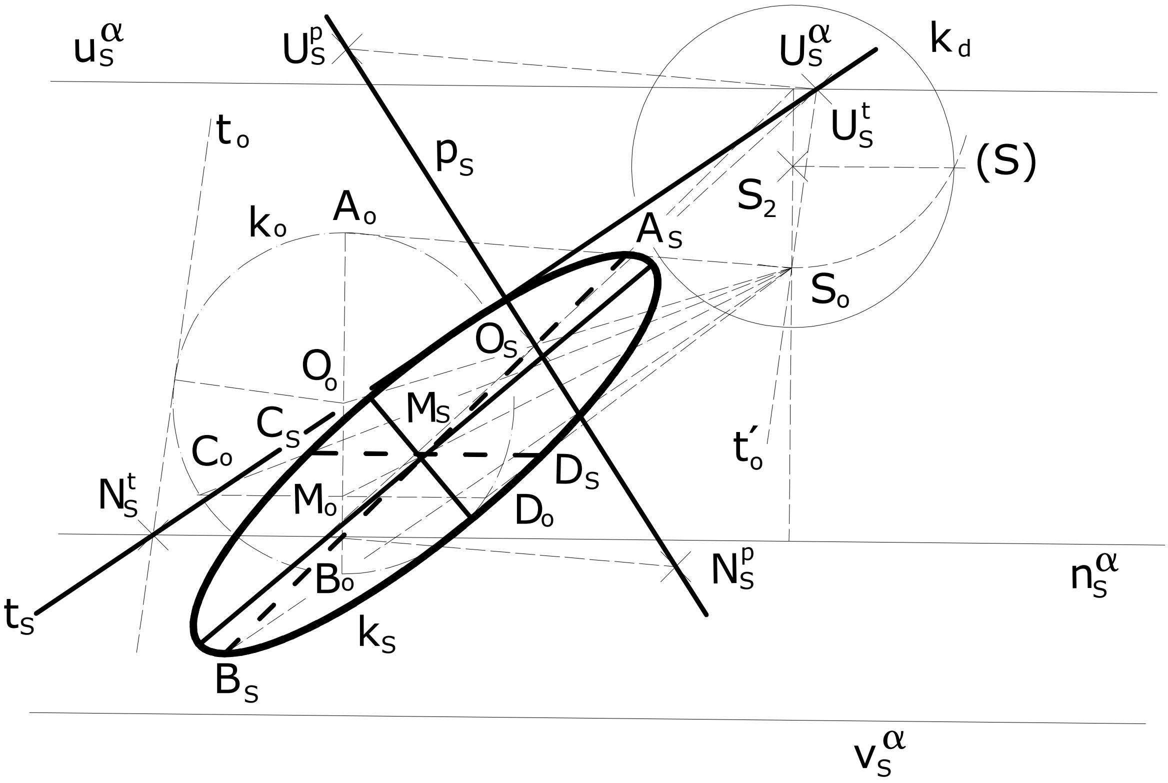
Řešení: Rovinu α otočíme kolem stopy $n_S{}^\alpha$ do průmětny užitím kolineace: Střed kolineace S_O určíme pomocí otočení směrové roviny α', určené úběžnicí roviny a středem promítaní, kolem u_S^α do průmětny. Střed S_O sestrojíme jako v příkladu 27). Osa kolineace je n_S^α a úběžnice kolineace je $u_S{}^\alpha$. Spádové přímce s_S vedené bodem C_S a úběžníkem U_S^α v kolineaci odpovídá přímka s_O. Bod N_S^s je samodružný a spádová přímka je kolmá ke stopě roviny α, tudíž s_O je kolmá k ose kolineace n_S^α a prochází stopníkem N_S^s. Obraz C_O bodu C_S v kolineaci leží na s_O a na přímce S_OC_S. Body A_O, B_O můžeme sestrojit stejným způsobem jako bod C_O, nebo využijeme toho, že přímce vedené body C_SA_S ve středové kolineaci odpovídá přímka C_OA_O a tyto přímky se protínají na ose kolineace. Bod A_O je tedy průsečík přímky S_OA_S a přímky vedené bodem C_O a průsečíkem přímky C_SA_S s osou kolineace n_S^α. Stejným způsobem sestrojíme bod B_O. Trojúhelník $A_OB_OC_O$ je hledaná skutečná velikost trojúhelníka ABC.

Příklad 29) V rovině α sestrojte pravidelný pětiúhelník, je-li dán jeho střed O a vrchol A. Rovina je dána stopou a úběžnicí a body svými středovými průměty.



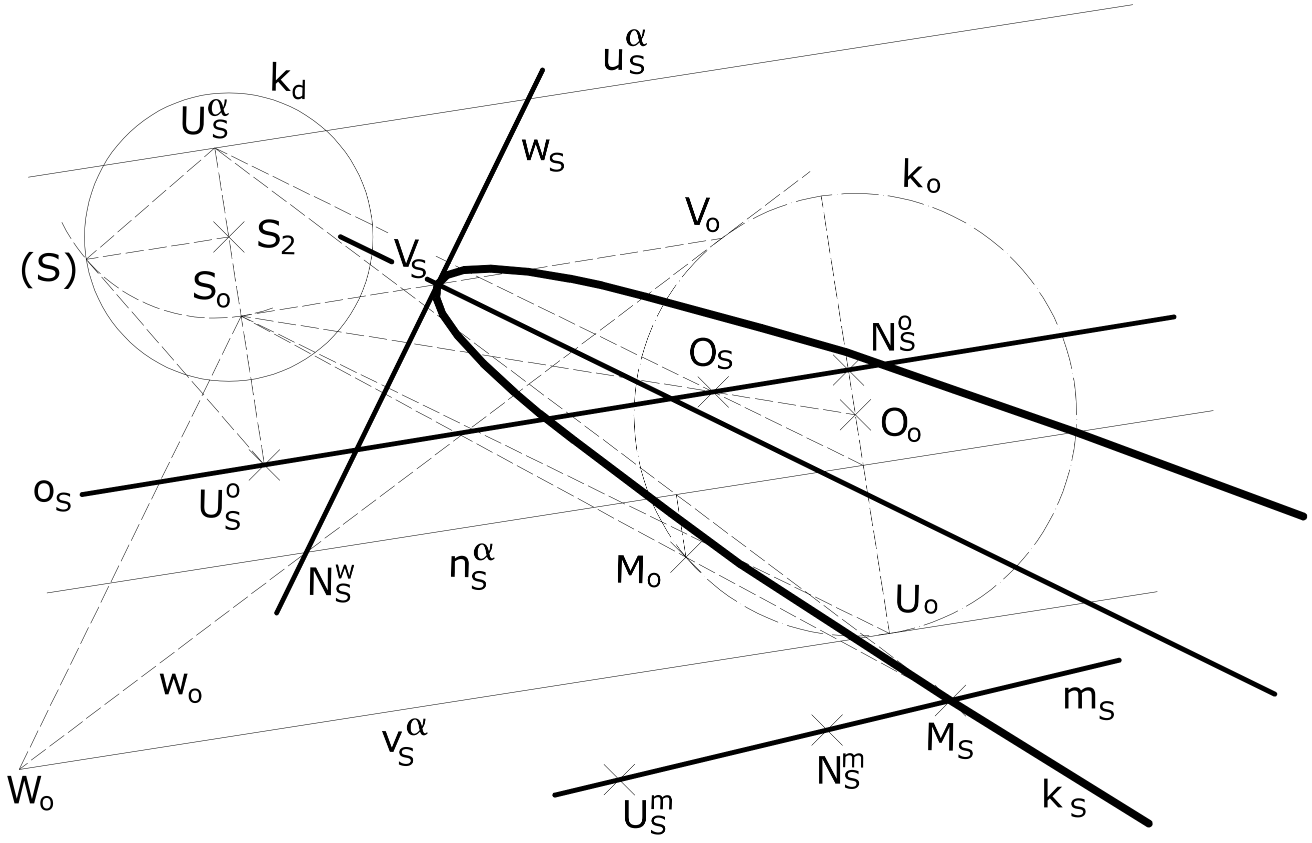
Řešení: Rovinu α otočíme kolem stopy $n_S{}^\alpha$ do průmětny užitím kolineace: Střed S_O určíme pomocí otočení směrové roviny α', určené úběžnicí roviny a středem promítaní, kolem $u_S{}^\alpha$ do průmětny. Střed S_O sestrojíme jako v příkladu 27). Osa kolineace je $n_S{}^\alpha$ a úběžnice kolineace je $u_S{}^\alpha$. Spádové přímce s_S vedené bodem O_S v kolineaci odpovídá přímka s_O. Bod N_S^s je samodružný a spádová přímka je kolmá ke stopě roviny α, tudíž s_O je kolmá k ose n_S^α kolineace a prochází stopníkem N_S^s. Obraz O_O bodu O_S v kolineaci leží na s_O a na přímce S_OA_S. Obdobně jako bod O_O sestrojíme bod A_O. Nyní sestrojíme v otočení pětiúhelník $A_OB_OC_O$ E_OD_O. Opačným postupem pomocí spádových přímek můžeme sestrojit středové průměty jednotlivých bodů, nebo využijeme toho, že otočené přímce A_OE_O odpovídá středový průmět přímky E_SA_S. Tyto přímky se protínají na ose kolineace. Najdeme průsečík přímky A_OE_O na ose n_S^α a vedeme jím přímku bodem A_S. Bod E_S je průsečík přímky S_OE_O a přímky vedené bodem A_S. Obdobným způsobem sestrojíme zbytek bodů.

Příklad 30) Sestrojte středový průmět kružnice *k*, je-li dán její střed *O* a tečna *t*. Tečna je dána stopníkem a úběžníkem a bod *O* je dán na nositelce *p*.



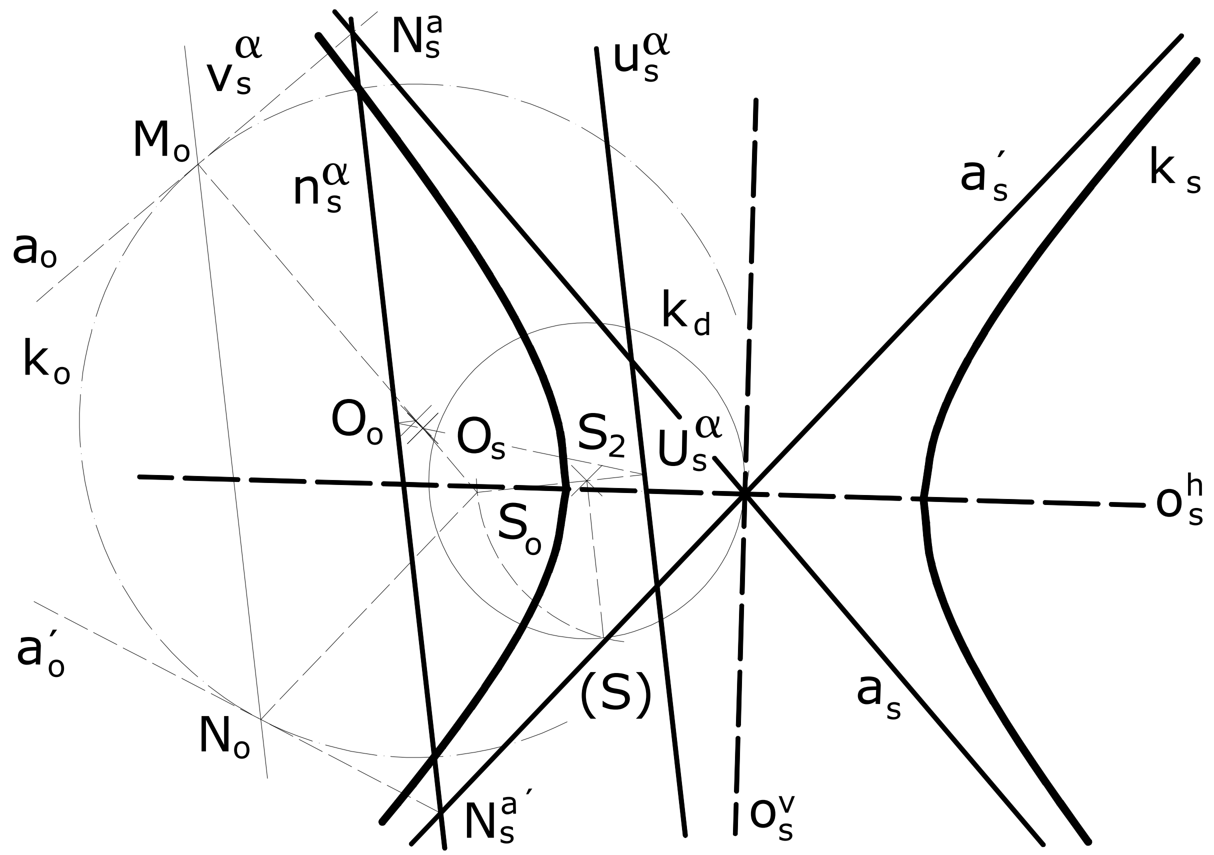
Řešení: Tečna *t* a střed *O* nám určují rovinu α, v které leží kružnice. Rovinu sestrojíme jako v příkladu 11). Dále rovinu α otočíme do průmětny. Uvažujeme středovou kolineaci o středu S_O, ose n_S^α a úběžnici u_S^α a protiúběžnici v_S^α. Pro protiúběžnici platí, že vzdálenost $u_S^\alpha S_O$ se rovná vzdálenosti $n_S^\alpha v_S^\alpha$. Sestrojíme bod O_O a tečnu t_O stejným způsobem jako v předcházejícím příkladu. Sestrojíme kružnici k_O, její střed je v bodě O_O, poloměr je velikost úsečky, vedené bodem O_O a průsečíkem kolmice z bodu O_O na tečnu t_O. Kružnice k_O nemá s protiúběžnicí v_S^α žádný společný bod. Kuželosečka k_S neobsahuje proto nevlastní bod a je tedy elipsou. Její sdružené průměry určíme takto: K průměru A_OB_O kružnice k_O kolmému k n_S^α určíme odpovídající úsečku A_SB_S, která je již průměrem elipsy k_S. Střed M_S této úsečky je tedy střed elipsy k_S, jemuž odpovídá ve středové kolineaci bod M_O průměru A_OB_O. Vedeme-li bodem M_O tětivu C_OD_O kružnice k_O rovnoběžnou s n_S^α, pak je úsečka C_SD_S průměr elipsy k_S sdružený s průměrem A_SB_S. Máme tedy dva sdružené průměry A_SB_S, C_SD_S a tím je kuželosečka k_S jednoznačně určena. Pro sestrojení hlavní a vedlejší osy můžeme použít Rytzovu konstrukci.

Příklad 31) Sestrojte středový průmět kružnice *k*, která vznikne rotací bodu *M* kolem osy *o*. Bod *M* je dán na nositelce *m* a osa *o* je určena stopníkem a úběžníkem.



Řešení: Kružnice, která vznikne rotací bodu *M* kolem osy *o*, leží v rovině *α* kolmé k ose *o* vedené bodem *M*. Tuto rovinu sestrojíme jako v příkladu 24). Dále potřebujeme zjistit střed *O* kružnice *k*. Bod *O* je průsečík osy *o* a roviny *α* - viz. příklad 17). Jako v předcházející úloze otočíme rovinu *α* do průmětny a uvažujeme středovou kolineaci o středu S_O, ose n_S^α, úběžnici u_S^α a protiúběžnici v_S^α. Sestrojíme střed O_O a bod M_O jako v příkladu 28) a kružnici k_O o středu O_O a poloměru O_OM_O. Protože se kružnice k_O dotýká v bodě U_O protiúběžnice v_S^α, bude středovým průmětem kružnice *k* parabola k_S . Směr S_OU_O určuje směr osy paraboly. Kolmice na směr S_OU_O bodem S_O protíná v_S^α v bodě W_O a vrcholová tečna paraboly k_S má směr S_OW_O. Tečně $w_O \neq v_S^\alpha$ ke kružnici k_O vedené bodem W_O odpovídá ve středové kolineaci vrcholová tečna w_S a jejímu bodu dotyku V_O vrchol V_S paraboly k_S . Osa paraboly k_S je rovnoběžka se směrem S_OU_O vedená bodem V_S. K sestrojení paraboly můžeme využít tečny k parabole a najít ohnisko, nebo parabolu sestrojit bodově.

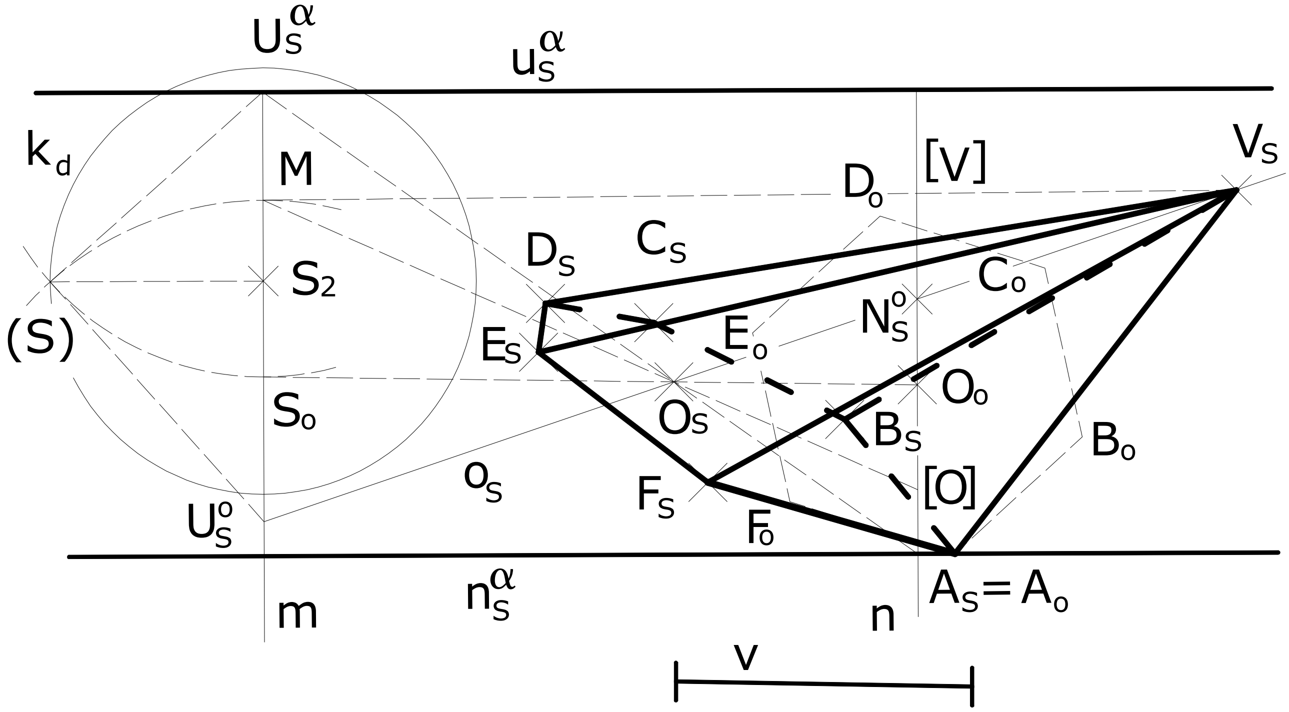
Příklad 32) Sestrojte středový průmět kružnice *k*, známe-li střed *O* a poloměr *r*. Kružnice *k* leží v rovině *α*, která je zadaná stopou a úběžnicí.



Řešení: Otočíme rovinu *α* do průmětny. Uvažujeme středovou kolineaci o středu S_O, ose n_S^α, úběžnici u_s^α a protiúběžnici v_S^α. Sestrojíme střed O_O jako v příkladu 28) a kružnici k_O o středu O_O a poloměru *r*. Kružnice k_O protíná v_S^α ve dvou bodech M_O, N_O a k_S je proto hyperbola. Bodům M_O, N_O odpovídají ve středové kolineaci nevlastní body hyperboly a přímky a_S, a_S' odpovídající tečnám a_O, a_O' kružnice k_O v bodech M_O, N_O, jsou asymptoty hyperboly k_S. Směr asymptoty a_S odpovídá směru přímky S_OM_O a směr asymptoty a_S' odpovídá směru přímky S_ON_O. Body N_S^a a $N_S^{a'}$ jsou samodružné a jsou to průsečíky stopy roviny s přímkami a_O, a_O'. Body N_S^a a $N_S^{a'}$ vedeme rovnoběžky a_S, a_S' se směry S_OM_O, S_ON_O. Průsečík přímek a_S, a_S' je střed hyperboly. Sestrojíme osy hyperboly. Hlavní osu hyperboly můžeme omezit pomocí středové kolineace. Hyperbolu k_S můžeme sestrojit bodově.

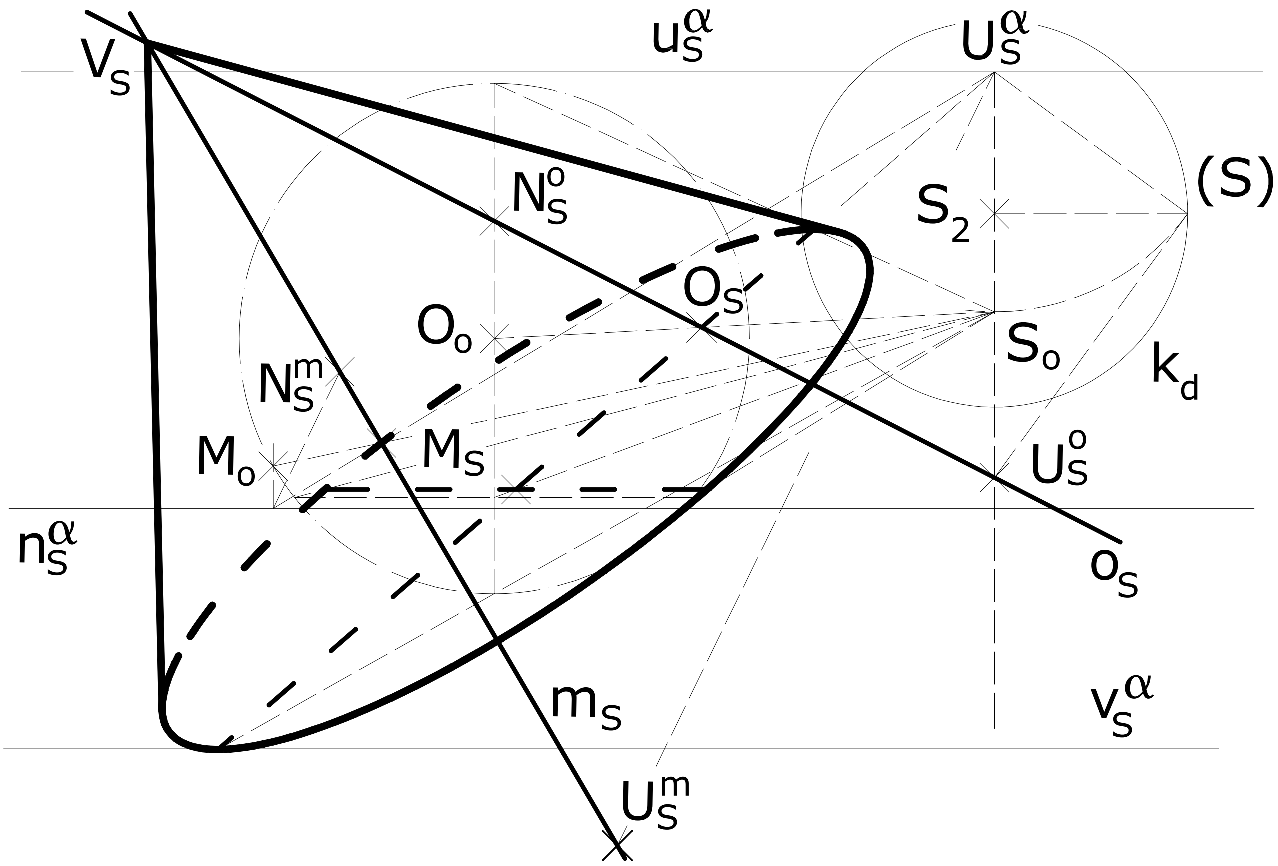
Zobrazení těles

Příklad 33) Sestrojte středový průmět pravidelného šestibokého jehlanu s podstavou v rovině α, znáte-li střed O a vrchol A podstavy a výšku jehlanu v. Rovina je zadána stopou a úběžnicí.



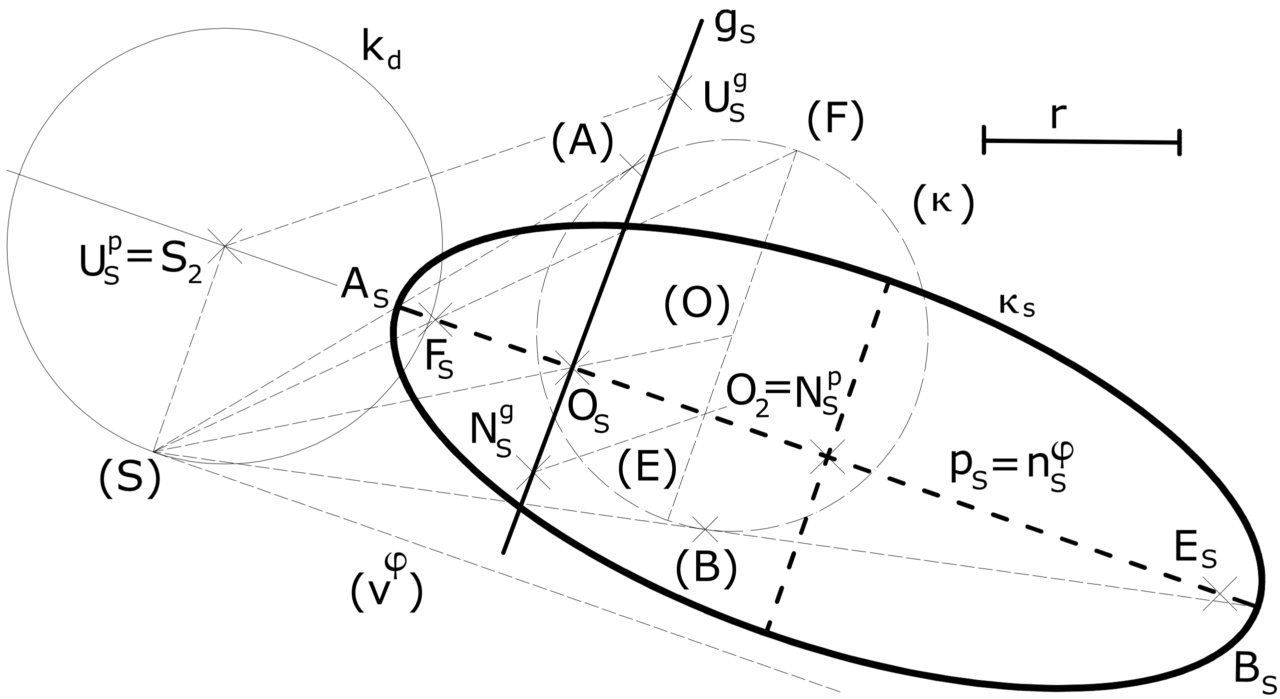
Řešení: V rovině α sestrojíme šestiúhelník podstavy pomocí otočení roviny α do průmětny podle příkladu 29). Určíme úběžník U_S^o všech kolmic k rovině α a sestrojíme středový průmět o_S kolmice o procházející bodem O. Na o naneseme od bodu O úsečku velikosti v - viz. příklad 23). Obdržíme bod V, což je vrchol pravidelného šestibokého jehlanu. Středové průměty pobočných hran vedeme bodem V_S k vrcholům podstavy $A_S B_S C_S D_S E_S F_S$.

Příklad 34) Zobrazte rotační kužel, je-li zadaná osa *o* kužele, jedna povrchová přímka *m* s bodem *M*, který leží v podstavě kužele. Přímky jsou zadány stopníky a úběžníky.



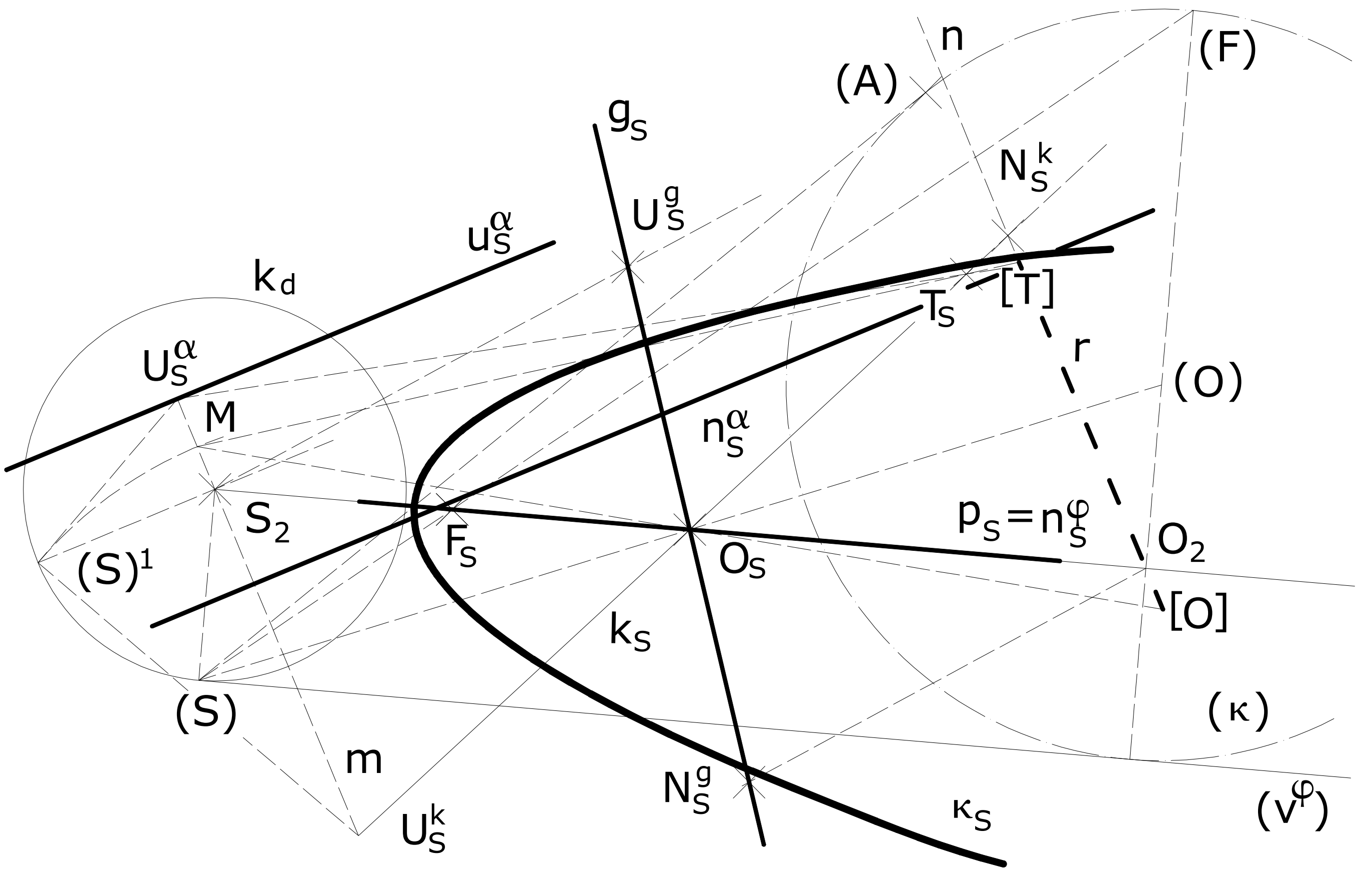
Řešení: Podstava kužele leží v rovině *α*, která je kolmá na osu *o* a prochází bodem *M*. Tuto rovinu sestrojíme jako v příkladu 24). Sestrojíme průsečík *O* osy *o* a roviny *α* - viz. příklad 17). Otočíme rovinu *α* do průmětny a sestrojíme středový průmět kružnice určené středem *O* a bodem *M*. Protože kružnice v otočení neprotíná protiúběžnici v_S^α, je podstava kužele elipsa a sestrojíme ji jako v příkladu 30). Vrchol *V* kužele je průsečík přímek *o* a *m* – viz. příklad 8). Nyní stačí vést tečny k elipse ze středového průmětu V_S bodu *V*.

Příklad 35) Sestrojte obrys kulové plochy κ, je-li dán její střed O a poloměr r. Bod O je zadán na nositelce g.



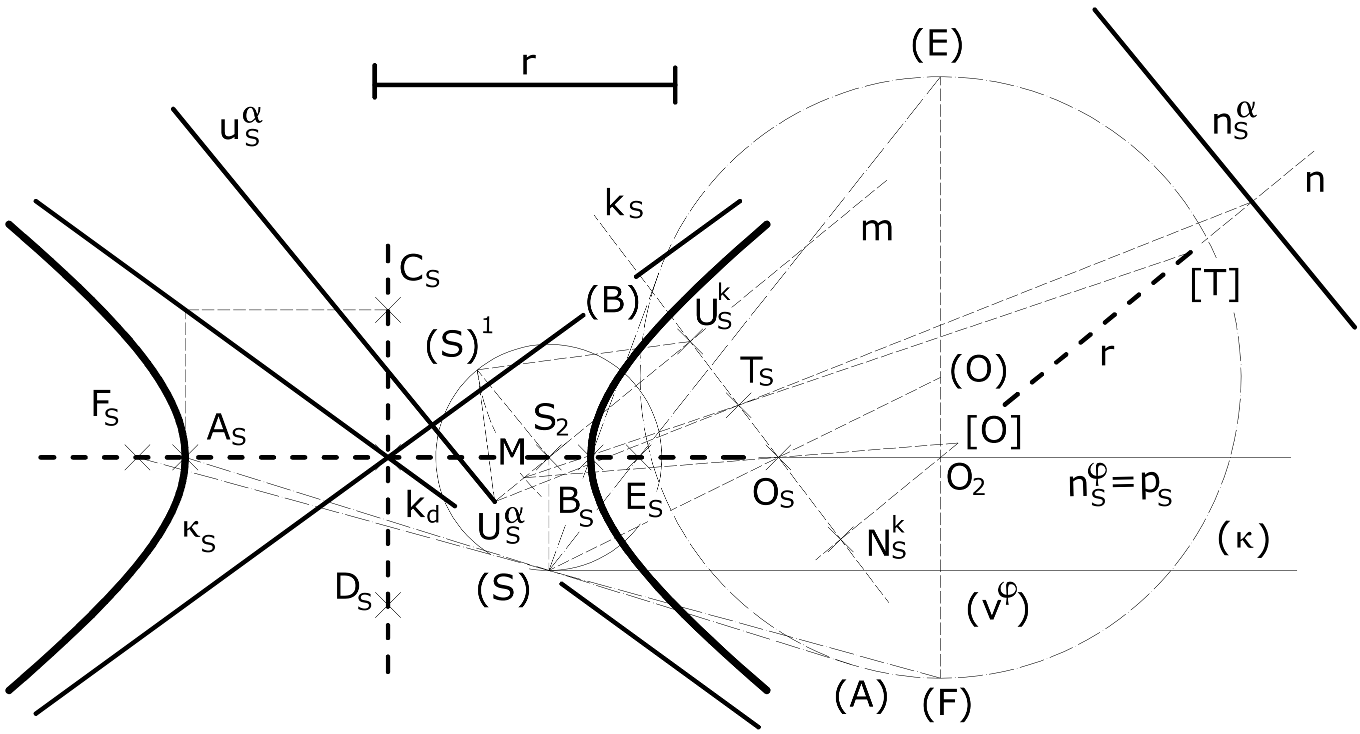
Řešení: Přímkou SO proložíme rovinu φ kolmou k průmětně. Ta protíná kulovou plochu κ v hlavní kružnici a obsahuje průměr FE kolmý k průmětně. Považujme rovinu φ za další průmětnu a sestrojíme pravoúhlý průmět hlavní kružnice do této roviny, který sklopíme do průmětny. Bod (S) je sklopený bod S a je to průsečík kružnice k_d a kolmice na stopu roviny φ. Pravoúhlý průmět bodu O zjistíme pomocí přímek p a g. Víme, že přímky jsou různoběžné, protože jejich společným bodem je bod O. Proto spojnice úběžníku je rovnoběžná se spojnicí stopníku. Vedeme tedy rovnoběžku s přímkou $U_S^g U_S^p$ bodem N_S^g. Průsečík N_S^p je hledaný pravoúhlý průmět O_2 bodu O. Nyní můžeme sklopit bod O. Sklopený bod (O) je průsečík přímky $(S)O_S$ a kolmice na n_S^φ vedené bodem O_2. Sklopený průmět hlavní kružnice (κ) má střed v bodě (O) a poloměr r. Protože kružnice (κ) a protiúběžnice (v^φ) nemají společný bod, bude středovým průmětem kulové plochy elipsa. Průměty bodů (F), (E) z bodu (S) na n_S^φ jsou ohniska F_S, E_S kuželosečky κ_S a tečny vedené z bodu (S) ke kružnici (κ) protínají n_S^φ ve vrcholech A_S, B_S kuželosečky. Tím je kuželosečka κ_S určena.

Příklad 36) Sestrojte středový průmět kulové plochy *κ*, je-li zadán střed *O* a tečná rovina *α*. Bod *O* je zadán na nositelce *g* a rovina *α* je zadaná stopou a úběžnicí.



Řešení: Pro sestrojení kulové plochy potřebujeme znát její poloměr *r*. Ten zjistíme, vedeme-li kolmou přímku *k* bodem *O* k tečné rovině *α* a najdeme bod *T*, který je průsečík roviny *α* a kolmice *k*. Poloměr *r* je určený vzdáleností bodu *O* a *T* - viz. příklad 23). Nyní pokračujeme jako v příkladu 35). Najdeme bod *(O)* a sestrojíme kružnici *(κ)* o středu v bodě *(O)* a poloměru *r = [O][T]*. Protože se kružnice *(κ)* dotýká protiúběžnice (v^φ) v jednom bodě, bude středovým průmětem kulové plochy parabola. Průmět bodu *(F)* z bodu *(S)* na $n_S{}^\varphi$ je ohnisko F_S kuželosečky $κ_S$ a tečna vedená z bodu *(S)* ke kružnici *(κ)* protíná n_S^φ ve vrcholu paraboly A_S. Tím je kuželosečka $κ_S$ určena.

Příklad 37) Sestrojte středový průmět kulové plochy κ, je-li daná tečná rovina α s bodem dotyku T a poloměr r kulové plochy. Rovina α je zadaná stopou a úběžnicí.



Řešení: Pro sestrojení středového průmětu kulové plochy potřebuje znát její střed, ten zjistíme tak, že vedeme kolmici bodem T k tečné rovině α a na kolmici najdeme bod O ve vzdálenosti r od bodu T - viz. příklad 23). Bod O je hledaný střed kulové plochy κ. Nyní pokračujeme jako v příkladu 35). Protože kružnice *(κ)* se středem v bodě *(O)* a poloměrem r protíná protiúběžnici *(v^φ)* ve dvou bodech, bude hledaným středovým průmětem kulové plochy κ hyperbola. Průměty bodů *(E)* a *(F)* z bodu *(S)* na n_S^φ jsou ohniska E_S, F_S kuželosečky κ_S a tečny vedené z bodu *(S)* ke kružnici *(κ)* protínájí n_S^φ ve vrcholech A_S, B_S hyperboly. Tím je kuželosečka κ_S určena.

Seznam použité literatury

Piska, Rudolf – Medek, Václav. Deskriptivní geometrie I, 1.vydání, Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1966. 336 s.

Urban, Alois. Deskriptivní geometrie I, 3. vydání, Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1982. 416 s.

Machala, František. Středové promítání a lineární perspektiva, 2. vydání, Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1992. 132 s.