Mathrace Sada 1

odevzdávejte do 17.00

1. Zaměňte devět písmen devíti číslicemi $1, 2, \ldots, 9$, aby platilo:

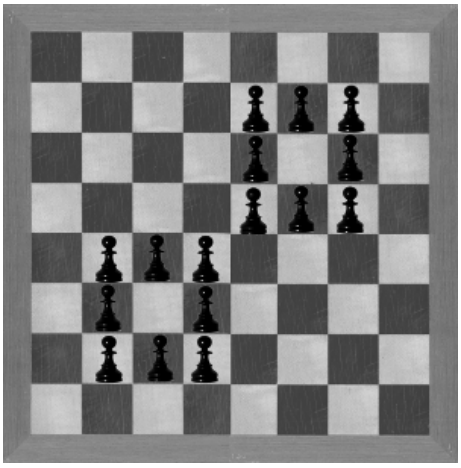
$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{H} \\ & \mathrm{R} & \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{E} \\ \hline \mathrm{Z} & \mathrm{A} & \mathrm{C} & \mathrm{A} & \mathrm{L} \end{array}$$

   Jako řešení zadejte poslední řádek (tj. číslo ZACAL). Je možné zadat libovolné ze správných řešení.

2. Nechť je dána posloupnost kruhů o obsazích $S_1, S_2, \ldots, S_{2010}$. Součet všech těchto obsahů je 2011π a pro obsahy platí $S_{n+1} = S_1 + S_n$. Určete průměr kruhu s obsahem S_{1005}.

3. Mějme závodníky s čísly 1 až n, $n \in \{2, \ldots, 100\}$. Ti se utkají na n soutěžích. Pro jaká n může platit, že závodník 1 většinou doběhne před závodníkem 2, závodník 2 většinou před závodníkem 3, ..., závodník $n-1$ před závodníkem n a závodník n před závodníkem 1? Udejte součet všech vyhovujících n.

4. Na obrázku vidíte šachovnici, na níž je vyznačeno postavení 16 pěšců. Máte použít jednoho koně a postavit ho tak, aby nejmenším počtem tahů sebral všechny figurky. Jaký nejmenší počet tahů je k tomu potřeba?



5. Nechť $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 3^7\}$ je množina taková, že součet žádných dvou (ne nutně různých) prvků M neleží v M. Určete největší možný počet prvků množiny M.

6. Devět účastníků turnaje ve střelbě na běžící terč se rozhodlo uspořádat toto klání následujícím způsobem: V každém kole se z doposud neporažených střelců určí losem dvojice, která se spolu utká v dalším kole. Vítěz posledního (osmého) střetnutí se stává vítězem celého turnaje. Zjistěte počet všech možných průběhů této soutěže.

7. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla taková, že $3a = c^3$, $5a = b^2$ a neexistuje šestá mocnina prvočísla, která by dělila a. Najděte největší možnou hodnotu a.

8. Newyorský taxikář jede z bodu $A(1,1)$ do bodu $B(4,7)$. V bodech $C(2,5)$ a $D(3,4)$ jsou dopravní kontroly. Jaká je pravděpodobnost, že se kontrolám vyhne, pokud v každém kroku z křižovatky (a,b), kde $a < 4$, $b < 7$ s pravděpodobností $1/2$ zamíří na $(a+1,b)$ a s pravděpodobností $1/2$ na $(a,b+1)$ a z ostatních křižovatek míří přímo k B. Výsledek zadejte jako zlomek v základním tvaru pomocí lomítka, např. "2/7".

9. Ze skupiny šesti studentů – Alice, Braňo, Cecílie, Dan, Eva a Fero – je potřeba vytvořit soutěžní tým o dvou až šesti členech. Alice může jít jen pokud půjde Braňo. Pokud půjde Cecílie, nepůjdou Dan ani Eva. Pokud půjde Fero, Alice nepůjde. Kolika způsoby lze tým sestavit tak, aby byly splněny všechny podmínky?

10. Je dáno 2010 bodů $A_1, A_2, \ldots, A_{2010}$ v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce. Každá přímka, která neprochází žádným z daných bodů, určuje rozklad daných bodů na dvě disjunktní podmnožiny. Kolik různých rozkladů lze takto dostat?

11. Najděte celočíselné dvojice (x, y) splňující

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots} + \frac{1}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots)^2} + \cdots} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots} + \frac{1}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots)^2} + \cdots\right)^2} + \cdots = y$$

Výsledek zapište jako součet nejmenšího možného x a největšího možného y.

12. Najděte minimální hodnotu výrazu $\sqrt{a^2+4}+\sqrt{(b-a)^2+9}+\sqrt{(c-b)^2+4}+\sqrt{(c-4)^2+(5-d)^2}+\sqrt{d^2+1}$, kde a, b, c, d jsou reálná čísla.

13. Čtverec $KLMN$ se nachází uvnitř čtverce $ABCD$, středy obou čtverců jsou totožné. Čtverec $KLMN$ je otočen tak, že prodloužení jeho stran prochází všemi vrcholy $ABCD$. Čtverec $ABCD$ je těmito prodlouženými stranami rozdělen na 5 tečnových čtyřúhelníků (jedním z nich je $KLMN$) a čtyři trojúhelníky. Určete délku strany $KLMN$, je-li strana $ABCD$ rovna 1.

14. Mějme následující tvrzení o přirozených číslech n, x, y.

    A: $n|x^2 + y^2$

    B: $n|xy$

    C: n je prvočíslo

    D: $n = 42$

    E: $n|x$ nebo $n|y$

    Uvažme nyní tvrzení $A \wedge B, A \wedge C, A \wedge D, B \wedge C, B \wedge D, C \wedge D, B \wedge C \wedge D, A \wedge C \wedge D, A \wedge B \wedge D, A \wedge B \wedge C$. Některá z nich implikují E, jiná ne. Uveďte řetězec nul a jedniček indikujících, zda dané složené tvrzení implikuje E. Pokud např. myslíte, že první tři jsou dobře a ostatní špatně, zadejte "1110000000".

15. Kolik je trojúhelníků s celočíselnými délkami a obvodem 28, pokud podobné trojúhelníky počítáme pouze jednou?

Mathrace Sada 2

odevzdávejte do 18.00

16. Kolika způsoby lze obarvit vrcholy krychle $ABCDEFGH$ černě a bíle tak, aby každá rovina procházející třemi vrcholy obsahovala vrcholy obou barev?

17. Matěje, Liběnku, Henryho a Bublu napadlo zahrát si bezva hru. Hráči si stoupnou do kruhu a do klobouku se umístí dva lístečky, jeden s nápisem "vyhrál jsi", druhý s nápisem "pošli dál". Začíná Henry. Pokud si vytáhne první lísteček, vyhrál. V opačném případě posílá klobouk hráči po své levé ruce. Stejně hrají i ostatní. Jaké jsou pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů? Zadejte **součin** těchto pravděpodobností jako zlomek v základním tvaru pomocí lomítka, např. "2/7".

18. Kolik je pěticiferných čísel sestavených z cifer $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ takových, že jsou v nich právě 3 různé číslice?

19. Nahraďte písmena číslicemi, aby platilo následující zjednodušení: $\frac{MMMM5}{NNN5} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{MM5}{N5} = 5$. Zadejte číslo $10 \cdot N + M$.

20. Nad průměrem AB, $|AB| = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ je sestrojena půlkružnice p se středem O. Body C, D dělí stranu AB tak, že $|AC| = |BD| < \frac{1}{2}|AB|$. Nad úsečkami AC, CD, DB jsou sestrojeny půlkružnice a to tak, že krůžnice nad průměry AC a BD leží vzhledem k AB ve stejné polorovině jako p, zbylá půlkružnice v polorovině opačné. Všechny čtyři půlkružnice vymezují část roviny o obsahu S_1.

    Dále je dána kružnice nad průměrem EF, kde E a F jsou průsečíky dvou z výše uvedených půlkružnic s osou úsečky AB. Její obsah je S_2. Určete hodnotu rozdílu $S_1 - S_2$.

21. Kolik různých tahů může na prázdné šachovnici udělat jezdec? (Tah je dvojice výchozí pozice – cílová pozice). Jezdec může začínat na libovolném neobsazeném poli šachovnice.

22. Buď x reálné číslo takové, že $\frac{1}{\cos x} - tg\, x = 2$. Vypočítejte, čemu se rovná $\frac{1}{\cos x} + tg\, x$.

23. Najděte všechna přirozená čísla x, pro která platí, že $x = y^2$, kde $y = |\{w \in \mathbb{N}; w|x\}|$ (tedy y je počet přirozených dělitelů čísla x). Zadejte součet všech vyhovujících x.

24. Zjistěte, kolik celočíselných řešení má rovnice

$$\lfloor \sqrt[2010]{n} \rfloor + \left\lfloor \sqrt[2010]{\frac{n+1}{2}} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \sqrt[2010]{\frac{n+2010}{2011}} \right\rfloor = 2011.$$

    Zadejte posledních 5 cifer čísla. Pozn.: Výraz $\lfloor x \rfloor$ značí celou část čísla x, tj. největší celé číslo, které není větší než číslo x.

25. Ňouma s Koumou narýsovali velkou kružnici. Do ní vepsali a-úhelník, do něj kružnici, do ní b-úhelník, do něj kružnici, do ní c-úhelník a do něj kružnici. Protože to byla skvělá zábava, opakovali to celé ještě třikrát, kružnice vzniklá posledním tahem měla 1024-krát menší poloměr, než zadaná. Kolik je $a + b + c$?

26. Uvažme množinu 2^{42} přirozených čísel. Vezměme jejich rozdíly po dvou a ty mezi sebou vynásobme. Jakou nejvyšší mocninou dvojky bude tento součin dělitelný v nejméně příznivém případě? Zajímá nás posledních 5 cifer výsledku.

27. Mějme posloupnost danou vztahy $a_1 = 1$, $a_{3n} = a_n + 1$, $a_{4n} = a_{3n+1} + a_n - 1$, $a_{2n} = a_n$. Určete $a_{999999999}$.

28. Nechť b_n je poslední cifra čísla $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$. Posloupnost b_n je periodická. Jaká je její nejkratší perioda?

29. Pravidelný 1024-úhelník o straně 1 byl rozřezán na rovnoběžníky. Určete součet obsahů všech obdélníků v takovémto rozřezání.

30. Uvažujme obdélníkový pás $2 \times n$ a označme P_n počet všech takových obarvení některých jeho polí, že žádný čtverec 2×2 v něm nebude celý obarven. Najděte největší mocninu trojky, která dělí číslo P_{2010}. Jako odpověď zadejte exponent.

Mathrace Sada 3

odevzdávejte do 19.00

31. Nechť p, q, r jsou celá čísla mající právě dva dělitele v oboru přirozených čísel (ale sama mohou být záporná). Kolik řešení pak má rovnice $\frac{1}{p-q-r} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$?

32. Čemu se rovná 84, jestliže $8.8 = 54$? Tato otázka není nesmyslná, protože 54 není napsáno v desítkové soustavě. Takto položenou otázku lze interpretovat dvěma způsoby, obě odpovědi se považují za správné.

33. Najděte všechny trojice p, q, r reálných čísel splňující

$$\log pqr = -2 \tag{1}$$
$$\log p \log q \log r = 2 \tag{2}$$
$$\log p \log q + \log p \log r + \log r \log q = -1 \tag{3}$$

(Funkce log je logaritmus o základu 10.) Výsledek zadejte jako součet p, q, r.

34. Mějme čtverec $ABCD$ o straně 1. Body E, F uvnitř čtverce minimalizují součet $4|AE| + 3|DE| + 4|BF| + 3|CF| + 5|EF|$. Určete vzdálenost $|EF|$.

35. Krychli o hraně 1 rozvineme do roviny a zkonstruujeme nejmenší kružnici, která vzniklou síť obsahuje. Jaký největší poloměr může taková kružnice mít?

36. Je dán pravidelný dvanáctiúhelník $A_1A_2A_3 \ldots A_{12}$ vepsaný kružnici s poloměrem 10. Vypočtěte obsah lichoběžníku $A_1A_2A_4A_5$.

37. Všiml jsem si, že mé hodinky ve dne (0,5 dne) předbíhají správný čas o půl minuty, v noci (0,5 dne) se zase zpožďují o $\frac{1}{3}$ minuty. Ráno 1. května ukazovaly správný čas. Kolikátého května půjdou napřed o 5 minut?

38. Číslo X je větší než 100 a jeho cifry tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $q \in \mathbb{R}^+$, $q \neq 1$. Určete součet všech možných hodnot čísla X.

39. Matej, Mirek, Zdeněk, Petr, Vlado a Zbyněk se občas potkávají ve škole. Matej chodí do školy každý druhý den, Mirek každý třetí, Vlado každý čtvrtý, Zdeněk každý pátý, Zbyněk každý šestý a Petr každý sedmý. Protože jsou to svědomití studenti, chodí do školy i o svátcích a prázdninách. V roce 2010 se jednoho dne potkali. Který den to bylo, pokud víte, že Zdeněk byl ve škole 12.1.2010, Petr 13.2.2010, Zbyněk 14.3.2010 a Vlado 13.4.2010. Zadejte součet dne a měsíce.

40. Henry, Liběnka a Matěj hráli hru zvanou Magická trojka. Každý hráč měl 3 hromádky mincí: koruny, dvoukoruny a pětikoruny. Na začátku byly hromádky prázdné. V každém tahu musel hráč přidat právě jednu z kombinací mincí:

    a) Jednu 1 Kč, pět 2 Kč a čtyři 5 Kč
    b) Tři 1 Kč, jednu 2 Kč a dvě 5 Kč
    c) Čyři 1 Kč, tři 2 Kč a jednu 5 Kč

    Vyhrál ten, kdo své hromádky doplnil nejdříve tak, aby počet mincí na každé z nich byla třetí mocnina stejného přirozeného čísla k. Protože všichni hrají optimálně, ten, kdo začíná, vyhraje. Po kolika nejméně kolech to může nastat? (Kolo je tvořeno třemi tahy, každý hráč v něm táhne právě jednou.)

41. Kolika způsoby můžu vybrat 3 různé číslice (z množiny $\{0, 1, .., 9\}$) tak, abych žádné dvě nebyly po sobě jdoucí?

42. Jaké jsou možnosti pro největší úhel v trojúhelníku, který lze rozřezat na 5 trojúhelníků, které jsou všechny podobné původnímu? Výsledek uveďte jako součet všech možných řešení.

43. Liběnka se dočetla, že v roce 2012 bude už zase konec světa, a to hned několikrát. Všechna data však měla společné to, že trojnásobek součtu všech cifer v celém datu (tj. např pro 24.11.2010 2+4+1+1+2+0+1+0=11) byl roven součtu dne a měsíce. Jaká data to byla? Z každého data vezměte pouze den a tyto dny sečtěte.

44. V pěti domech pěti různých barev žije pět lidí pěti různých národností, každý má jiné auto, jiný oblíbený sport a chová jiné zvíře. Víte, že

    - Hokejista bydlí hned napravo od hráče rugby.
    - Volkswagen parkuje před prvním domem.
    - Švýcar žije hned nalevo od černého domu.
    - Chovatel psů hraje lakros.
    - Mezi domem, u nějž parkuje Ford, a žlutým domem je právě jeden dům.
    - Pátý dům je šedý.
    - Mezi domem se psy a žlutým domem jsou dva domy.
    - Želvy žijí hned vedle černého domu.
    - Mezi domem hráče lakrosu a zeleným domem je právě jeden dům.
    - Ir žije v domě č.2.
    - Kočky žijí hned vedle domu se Seatem.
    - Řek žije nalevo od řidiče BMW.
    - Mezi chovatelem motýlů a hráčem rugby jsou dva domy.
    - Mezi řidiči Porsche a Volkswagenu je jeden dům.
    - Ir hraje rugby.
    - Švéd řídí BMW.
    - Fotbalista chová želvy.

    Jako řešení zadejte první písmena značek aut od prvního k pátému domu.

45. Trojúhelník ABC má délky stran $a = 49$, $b = 61$, c je celé číslo. Najděte hodnotu c tak, aby byl ABC podobný trojúhelníku, jehož strany ve vhodném pořadí mají délky t_a, t_b, t_c, což jsou délky těžnic trojúhelníku ABC.