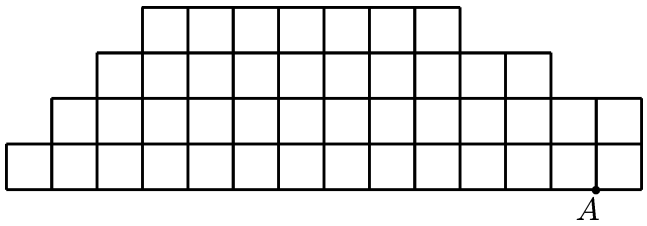
Internetová matematická olympiáda - 25. listopadu 2008

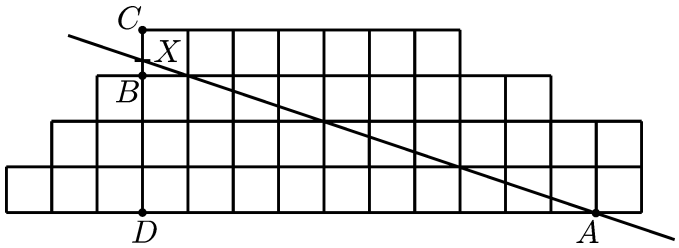
ŘEŠENÍ ÚLOH

1. Obrazec na Obrázku 1 je složen z 44 čtverců o straně 6 mm. Bodem A veďte jedinou přímku, která daný obrazec rozdělí na dva obrazce o stejném plošném obsahu.



Obrázek 1: K příkladu 1

Řešení: Je možno odhadnout, že přímka, která prochází bodem A a půlí daný obrazec bude procházet mezi body B a C, viz Obrázek 2. Hledejme tedy vzdálenost v bodu X, který leží na úsečce BC, od základny obrazce. Předpokládáme tedy, že $3 \cdot 6 \leq v \leq 4 \cdot 6$ mm. Pokud by nám při výpočtu vyšlo v mimo tento interval, tak bychom museli opravit odhad, tj. umístit body B a C „o schod níž“, resp. uvažovat komplikovanější variantu s bodem X na některé vodorovné straně některého z čtverců.



Obrázek 2: K řešení příkladu 1

Víme, že obrazec se skládá z 44 čtverců o straně 6 mm. Plošný obsah celého obrazce je tedy

$$P_{obrazce} = 44 \cdot 6^2 = 1584 \text{ mm}^2$$

a poloviny obrazce

$$P_{\frac{1}{2}obrazce} = \frac{1584}{2} = 792 \text{ mm}^2. \tag{1}$$

Označme si bod D tak, jak je vidět na Obrázku 2.

Z obrázku je vidět, že od bodu D směrem vlevo leží 6 čtverců s obsahem $6 \cdot 6^2$ mm^2 a vpravo od bodu D leží pravoúhlý trojúhelník AXD, jehož jedna odvěsna má délku $10 \cdot 6$ mm a druhá odvěsna je hledanou vzdáleností $DX = v$. Odtud plyne

$$P_{\frac{1}{2}obrazce} = 6 \cdot 6^2 + \frac{10 \cdot 6 \cdot v}{2}. \tag{2}$$

Ze vztahů (1) a (2) plyne rovnost

$$6 \cdot 6^2 + \frac{10 \cdot 6 \cdot v}{2} = 792,$$

jejímž řešením je $v = \frac{576}{30} \doteq 19.2$ mm, což splňuje předpoklad, že $18 \geq v \geq 24$ mm, tudíž bod X opravdu leží mezi body B a C.

2. Nechť p, q jsou reálná čísla taková, že rovnice $x^3 + px + q = 0$ má tři různá reálná řešení. Dokažte, že pak platí $p \leq 0$.

Řešení: Předpokládejme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, jsou reálnými kořeny rovnice $x^3 + px + q = 0$ pro něž platí $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq$ $\neq \alpha_3$. Potom platí

$$x^3 + px + q = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) =$$

$$= x^3 - \alpha_1 x^2 - \alpha_2 x^2 - \alpha_3 x^2 + \alpha_1\alpha_2 x + \alpha_2\alpha_3 x + \alpha_1\alpha_3 x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 =$$

$$= x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Odtud získáváme rovnice

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \tag{3}$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3 = p, \tag{4}$$

$$-\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = q.$$

Chceme dokázat, že pro číslo p platí $p \leq 0$. Z rovnice (3) použitím vzorce $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ a rovnosti (4) plyne

$$0 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 = \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\alpha_3 + \alpha_3^2 =$$

$$= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_3 =$$

$$= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3) =$$

$$= \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + 2p.$$

Máme tedy

$$2p = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2),$$

$$p = -\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2},$$

kde v čitateli vystupuje součet druhých mocnin libovolných čísel, který je vždy nezáporný, tudíž platí $p \leq 0$.

3. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $a_n = 10^{2n} - 2^{2n}$ násobkem čísla 96.

Řešení: 1. způsob řešení:

Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce:
α) Ověřme platnost pro nejmenší přípustné přirozené číslo n, tj. pro $n = 1$. $a_1 = 10^2 - 2^2 = 100 - 4 = 96$ a toto číslo je zřejmě dělitelné číslem 96.
β) Předpokládejme platnost tvrzení pro $n = k$, tj. že platí $96|(10^{2k} - 2^{2k})$. To ovšem znamená, že číslo $a_k = 10^{2k} - 2^{2k}$ můžeme napsat ve tvaru $a_k = 10^{2k} - 2^{2k} = 96m$, kde $m \in \mathbb{N}$. Dokažme, že tvrzení platí také pro $n = k + 1$, tj. že platí $96|(10^{2(k+1)} - 2^{2(k+1)})$.

$$a_{k+1} = 10^{2(k+1)} - 2^{2(k+1)} = 10^{2k}10^2 - 2^{2k}2^2 = 100 \cdot 10^{2k} - 4 \cdot 2^{2k} = (96 + 4) \cdot 10^{2k} - 4 \cdot 2^{2k} =$$

$$= 96 \cdot 10^{2k} + 4 \cdot 10^{2k} - 4 \cdot 2^{2k} = 96 \cdot 10^{2k} + 4\left(10^{2k} - 2^{2k}\right) = 96 \cdot 10^{2k} + 4 \cdot 96m = 96\left(10^{2k} + 4m\right).$$

To znamená, že číslo a_{k+1} je dělitelné číslem 96. Tím je tvrzení dokázáno.

2. způsob řešení:

Číslo a_n zapišme ve tvaru

$$a_n = 10^{2n} - 2^{2n} = 5^{2n}2^{2n} - 2^{2n} = 2^{2n}\left(5^{2n} - 1\right) = 2^{2n}\left(\left(5^n\right)^2 - 1\right) =$$

$$= 2^{2n}\left(5^n - 1\right)\left(5^n + 1\right).$$

Číslo $2^{2n} = \left(2^2\right)^n = 4^n$ je evidentně dělitelné číslem 4. Čísla $\left(5^n - 1\right)5^n\left(5^n + 1\right)$ jsou tři po sobě jdou přirozená čísla. Odsud plyne řada faktů:

a) Právě jedno z těchto čísel je dělitelné číslem 3.

b) Číslem 3 není dělitelné číslo 5^n.

c) Číslo $5^n - 1$ je nejen sudé, ale i dělitelné číslem 4.

d) Číslo $5^n + 1$ je sudé.

Z těchto úvah plyne, že číslo a_n lze zapsat ve tvaru

$$a_n = 10^{2n} - 2^{2n} = 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot k = 96k, \text{ kde } k \in \mathbb{N}.$$

Číslo a_n je tedy dělitelné číslem 96.

4. Večírku se zúčastní 13 osob, vybrali mezi sebou peníze a vyrazili na nákup. Už mají téměř vše potřebné nakoupeno, chtějí už jen nějaké pistácie, brambůrky a křupky. Usoudili, že těchto pochutin chtějí nakoupit právě 1 kg a zjistili, že jim zbývá suma 285 Kč, kterou chtějí beze zbytku utratit. V obchodě byla na výběr padesátigramová balení pistácií po 15 Kč, stogramová balení brambůrek po 21 Kč a stogramová balení křupek po 21 Kč. Rozhodli se, že brambůrek koupí minimální množství. Kolik balení mají vzít od každého druhu?

   Řešení: Označme si jako neznámé x, y a z počty balení pistácií, brambůrek a křupek. Informace o cenách a velikosti balení je možné zapsat pomocí následujících rovnic

$$\begin{array}{rrrcr} 15x & +21y & +21z & = & 285, \\ 50x & +100y & +100z & = & 1000. \end{array}$$

   Úpravou druhé rovnice získáme rovnici $x + 2y + 2z = 20$, odkud vyjádříme proměnnou x ve tvaru $x = 20 - 2y - 2z$. Takto vyjádřenou proměnnou dosadíme do první rovnice a upravíme.

$$\begin{aligned} 15x + 21y + 21z &= 285, \\ 15(20 - 2y - 2z) + 21y + 21z &= 285, \\ -9y - 9z &= -15, \\ 3y + 3z &= 5. \end{aligned}$$

   Zvolme proměnnou z jako parametr a v závislosti na tomto parametru dokážeme vyjádřit y a x následovně

$$\begin{aligned} z &= z, \\ y &= \tfrac{5-3z}{3}, \\ x &= \tfrac{285-21z-21\frac{5-3z}{3}}{15} \end{aligned}$$

   Mohou tedy nastat právě tyto situace závislé na počtu z balení křupek:

$$\text{1. varianta: } z = 0, y = \frac{5}{3}, x = \ldots,$$

$$\text{2. varianta: } z = 1, y = \frac{2}{3}, x = \ldots,$$

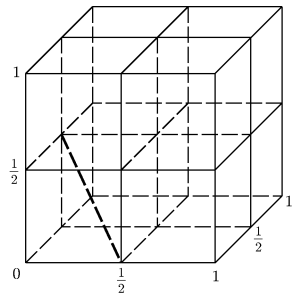
   3. varianta už nepřichází v úvahu, protože pro $z = 2$ vychází $y < 0$.

   Vzhledem k tomu, že ani v 1. ani ve 2. variantě nevycházejí „celá balení“ brambůrek, nemá tato úloha řešení.

   Poznamenejme, že tento neočekávaný výsledek má svůj prostý důvod. V zadání je prostě chyba :-(Omlouváme se řešitelům, že jsme je připravili o pozitivní výsledek příkladu. Pokud budete mít chuť, zkuste si změnit v zadání cenu balíčku brambůrek z 21 Kč na 27 Kč a příklad se rázem stane řešitelným.

5. Je dána krychle o hraně délky 1. Mějme uvnitř této krychle libovolně rozmístěno 9 bodů. Dokažte, že alespoň pro dva z nich platí, že jejich vzdálenost není větší než $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Řešení: Rozdělme krychli na 8 menších krychlí s hranami délky $\frac{1}{2}$, viz Obrázek 3.



Obrázek 3: K řešení příkladu 5

Umístíme-li do krychle libovolně 9 bodů, budou jistě nejméně dva z těchto bodů ležet v jedné z těchto menších krychlí. Tyto dva body v jedné menší krychli budou mít od sebe vzdálenost nejvýše rovnu délce tělesové úhlopříčky menší krychle. Spočtěme tedy délku této tělesové úhlopříčky u.

$$u = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Určete množinu všech bodů v rovině, která je grafem relace

$$\varrho = \left\{ [x,y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x-m)^2 + (y-n)^2 \leq \frac{1}{16} \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \left(x - p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - q - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{16}, \text{ pro } m,n,p,q \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Řešení:

Množinou všech bodů v rovině, které splňují podmínku

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 \leq \frac{1}{16}, \text{ kde } m,n \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

jsou kruhy se středy $[m,n]$ (tj. mají celočíselné souřadnice) a poloměry $\frac{1}{4}$.

Množinu bodů splňujících nerovnost

$$\left(x - p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - q - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{16}, \text{ kde } p,q \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

je třeba si představit jako nějaký „rovinný pás“. K této úvaze dospějeme následovně. Označme si $a = x - p - \frac{1}{2}$ a $b = x - q - \frac{1}{2}$, tím pádem nerovnost (6) můžeme zapsat ve tvaru

$$a^2 + b^2 \leq \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{16}.$$

Pokud bychom místo nerovnosti uvažovali rovnost, šlo by o vztah mezi délkami odvěsen a délkou přepony v pravoúhlém trojúhelníku. Tzn. že nerovnici (6) vyhovují body, jejichž x-ové souřadnice leží v nějakém intervalu $\langle c,d \rangle$, kde $c,d \in \mathbb{R}$.

Udělejme si představu pro konkrétní hodnoty $p,q \in \mathbb{Z}$.

- Pro $p=0, q=0$ platí $a = x - \frac{1}{2}$, $b = x - \frac{1}{2}$, tedy nerovnost (6) má tvar

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{16},$$

$$2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{16},$$

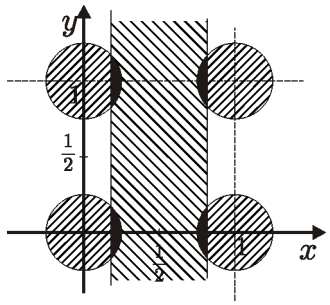
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{(2\sqrt{2}-1)^2}{32},$$

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{2\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}$$

$$x \in \left\langle \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}-1}{4\sqrt{2}} \right\rangle \doteq \langle 0.18, 0.82 \rangle.$$

- Pro další hodnoty p,q by byla situace náročnější, ale opět by šlo o body, jejichž x-ové souřadnice by ležely v nějakém intervalu, tzn. šlo by o rovinné pásy.

Výsledkem jsou tedy ty body v rovině, které jsou průnikem kruhů daných nerovností (5) a rovinných pásů daných nerovností (6), jak je naznačeno na Obrázku 4.



Obrázek 4: K řešení příkladu 6

7. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s plošným obsahem P, v němž úhel BAC má velikost α. Označme B_1 patu výšky z vrcholu B na stranu AC a C_1 patu výšky z vrcholu C na stranu AB. Vyjádřete obsah čtyřúhelníka BCB_1C_1 pomocí P a α.

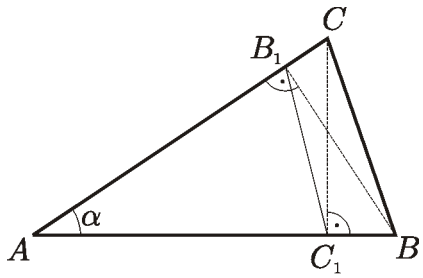
   Řešení: Z Obrázku 5 je vidět, že trojúhelníky $\triangle AB_1B$ a $\triangle AC_1C$ jsou pravoúhlé, tudíž platí

$$\cos\alpha = \frac{|AB_1|}{|AB|} \quad \Rightarrow |AB_1| = \cos\alpha|AB|$$

   a

$$\cos\alpha = \frac{|AC_1|}{|AC|} \quad \Rightarrow |AC_1| = \cos\alpha|AC|.$$

   V obou případech je úhel α při vrcholu A, tudíž jsou tyto trojúhelníky podobné a koeficient podobnosti je právě $\cos\alpha$.



Obrázek 5: K řešení příkladu 7

   Pro obsahy podobných trojúhelníků tedy platí

$$P_{\triangle AB_1C_1} = P_{\triangle ABC}\cos^2\alpha \equiv P\cos^2\alpha.$$

   Z Obrázku 7 je dále patrné, že obsah čtyřúhelníka BCB_1C_1 je možné vyjádřit jako rozdíl obsahu $\triangle ABC$ a obsahu „menšího“ $\triangle AB_1C_1$. Pro obsah čtyřúhelníka BCB_1C_1 tedy platí

$$P_{BCB_1C_1} = P - P_{\triangle AB_1C_1} = P - P\cos^2\alpha = P\left(1-\cos^2\alpha\right) = P\sin^2\alpha.$$

8. Čísla 1, 2, 3, …, 25 jsou rozmístěna do pěti řádků a pěti sloupců čtvercové sítě 5×5. Uvažujme součty čísel v každém řádku a v každém sloupci. Mezi těmito deseti hodnotami jsou sudá čísla („sudé součty“) a lichá čísla(„liché součty“). Označme m součet všech „sudých součtů“ a n součet všech „lichých součtů“. Mohou být čísla 1, 2, 3, …, 25 do této čtvrecové sítě rozmístěna tak, aby platilo $m = n$?

   Řešení: Odpověď je záporná, čísla $1, \ldots, 25$ se takto rozmístit nedají. Součet všech součtů čísel v řádcích se součty všech čísel ve sloupcích je

$$2 \cdot (1 + 2 + \cdots + 25) = 2 \cdot \frac{1 + 25}{2} \cdot 25 = 26 \cdot 25.$$

   Máme-li součet „sudých součtů“ označen m a součet „lichých součtů“ označen n, pak platí

$$26 \cdot 25 = m + n.$$

   Pokud by platilo $m = n$, pak bychom získali vztah

$$26 \cdot 25 = m + m = 2m,$$

   a tedy

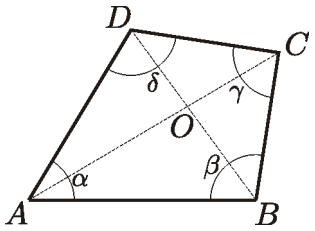
$$m = 13 \cdot 25.$$

   To je ovšem v rozporu s tím, že m je součet „sudých součtů“, tzn. že také m je sudé číslo.

   Proto nemůže nastat situace, že $m = n$.

9. Je dán čtyřúhelník $ABCD$ tak, že jeho úhlopříčky jsou osami jeho vnitřních úhlů. Určete jeho obsah, jestliže víte, že jedna strana a jedna z jeho úhlopříček mají shodně délku 2 cm.

Řešení: Označme vnitřní úhly čtyřúhelníka $ABCD$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, viz náčrtek na Obrázku 6. Označme dále průsečík O jeho úhlopříček.



Obrázek 6: Náčrtek k řešení příkladu 9

Vzhledem k faktu, že úhlopříčky mají být současně osami vnitřních úhlů, musí platit

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2} \tag{7}$$

neboť úhly AOB a COD jsou shodné.

Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníka je 360°, což spolu s (7) dává

$$360^\circ = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \frac{\delta}{2}\right) = 2(\alpha + \beta).$$

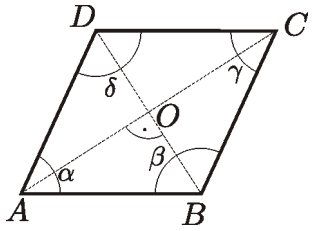
Z tohoto vztahu plyne

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ,$$

tudíž v trojúhelníku AOB je při vrcholu O pravý úhel a tím pádem na sebe úhlopříčky musí být kolmé. Vzhledem k tomu, že podle zadání jsou úhlopříčky zároveň osami vnitřních úhlů a jedna úhlopříčka má shodnou délku s jednou stranou, musí být trojúhelníky ABC, BCD, CDA a DAB rovnoramenné a platí

$$|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = 2 \text{ cm}.$$

Čtyřúhelník $ABCD$ je tedy kosočtverec, jak je správně uvedeno na Obrázku 7.



Obrázek 7: Obrázek k řešení příkladu 9

Plošný obsah kosočtverce $ABCD$ je roven 4násobku obsahu pravoúhlého trojúhelníka AOB, který má přeponu AB délky 2 cm a odvěsnu BO délky 1 cm. Dopočítejme tedy délku zbývající odvěsny AO.

$$|A0| = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Potom pro obsah trojúhelníka AOB platí

$$P_{\triangle AOB} = \frac{\sqrt{3} \cdot 1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a pro obsah kosočtverce $ABCD$ platí

$$P = 4 \cdot P_{\triangle AOB} = 4\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2.$$

10. Je dána množina funkcí $f(x) = x^2 + b|x| + c$, kde b, c jsou reálná čísla. Najděte všechny funkce z této množiny, které mají v intervalu $\langle -\frac{1}{2}, 1\rangle$ největší hodnotu 2 a nejmenší hodnotu 1.

Řešení: Graf G každé funkce $f(x)$ lze složit z částí grafů G_1 a G_2 funkcí

$$f_1(x) = x^2 + bx + c,$$

$$f_2(x) = x^2 - bx + c.$$

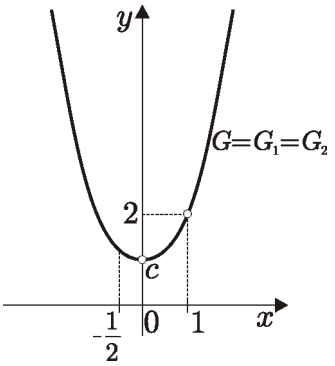
Funkce f_1 má minimum pro $x = -\frac{1}{2}b$, funkce f_2 pro $x = \frac{1}{2}b$. V obou případech je minimum rovno hodnotě $c - \frac{1}{4}b^2$.

Pro $b = 0$ je $f_1 = f_2$ a $G = G_1 = G_2$.

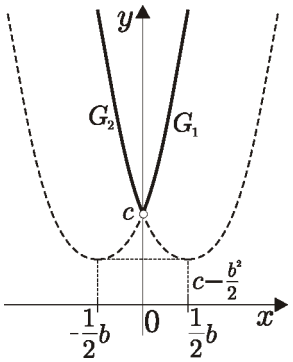
Pro $b > 0$ je graf G složen pro $x \geq 0$ z části grafu G_1, pro $x \leq 0$ z části grafu G_2 a to z těch, které neobsahují vrcholy parabol G_1 a G_2.

Také pro $b < 0$ je graf G složen pro $x \geq 0$ z části grafu G_1, pro $x \leq 0$ z části grafu G_2, ale z těch, které obsahují vrcholy parabol G_1 a G_2.

a) Je-li $b \geq 0$, nastane minimum pro $x = 0$, odkud plyne, že $c = 1$ a maximum pro $x = 1$. Tato situace je naznačena na Obrázcích 8 a 9.



Obrázek 8: K řešení příkladu 9, situace pro $b = 0$

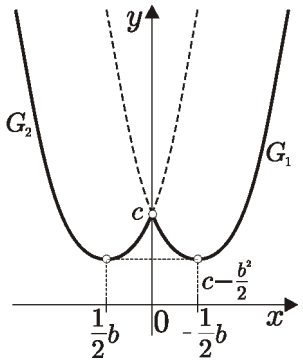


Obrázek 9: K řešení příkladu 9, situace pro $b > 0$

Výpočtem dostáváme pro $b = 0$ funkci $f(x) = x^2 + 1$ a pro $b > 0$ nedává rovnice $2 = 1 + b + 1$ žádné řešení.

b) Je-li $b < 0$, viz Obrázek 10, musíme rozlišit dva případy:

α) $-\frac{1}{2}b \leq 1$,



Obrázek 10: K řešení příkladu 9, situace pro $b > 0$

β) $-\frac{1}{2}b > 1$.

V případě α) nastane minimum pro $x = -\frac{1}{2}b$ a platí $c - \frac{1}{4}b^2 = 1$. Buď nastane maximum pro $x = 0$, pak je $c = 2$, $b = -2$ a dostaneme jako možné řešení funkci $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$, která skutečně vyhovuje. Nebo nastane maximum pro $x = 1$, což vede k rovnici $2 = 1+b+c$ a spojením s rovnicí $c - \frac{1}{4}^2 = 1$ dostaneme $b = -4$, což je ve sporu s předpokladem α).

V případě β) nastane minimum pro $x = 1$ a maximum pro $x = 0$. Z toho plynou rovnice $1 = 1 + b + c$ a $c = 2$, z nichž dostaneme $b = -2$, což je spor s předpokladem β).

Úloha má tedy dvě řešení $f(x) = x^2 + 1$ a $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$.

Nechali jsme se inspirovat příklady ze starších ročníků matematických olympiád převážně z 80. let a z jiných zajímavých knih o matematice a zdrojů z internetu. Snažili jsme se příklady modifikovat, ale některé jsme nechali v původní podobě, protože se nám zdály dostatečně atraktivní. Autorům původních příkladů děkujeme za inspiraci.

Ústav matematiky, FSI VUT v Brně, `www.math.fme.vutbr.cz`, `hoderova@fme.vutbr.cz`