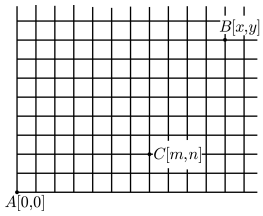
Internetová matematická olympiáda - 24. listopadu 2009

2. ročník

-autorská řešení

1. Na nekonečně velkém čtverečkovaném papíře si zvolte mřížový bod A, který bude počátkem. Nadále se od bodu A můžete pohybovat pouze doprava nebo nahoru po čtverečkové mříži. Kolika způsoby lze dosáhnout bodu $C[m,n]$ $(m,n>0)$? A kolika způsoby dojdeme z bodu $A[0,0]$ do bodu $B[x,y]$, kde $m<x$ a $n<y$, přes bod $C[m,n]$?

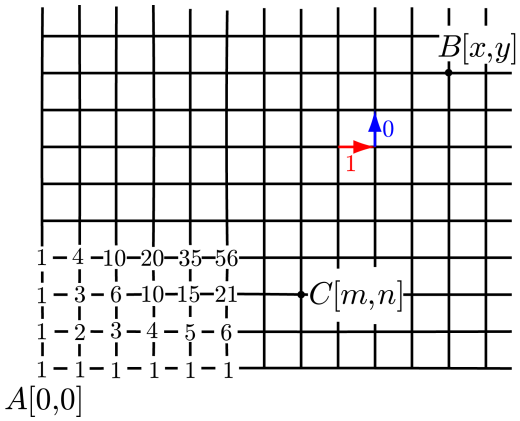


Obrázek 1: K zadání příkladu 1

Řešení:

Každému mřížovému bodu přiřaďme čísla podle toho, kolika způsoby se do něj dostaneme z bodu A, viz Obrázek 2.

Při pohybu mříží z bodu $A[0,0]$ do bodu $C[m,n]$ musíme udělat $m+n$ kroků. Přiřaďme krokům směrem doprava číslici 1 (jejich počet bude m) a kroky nahoru číslicí 0 (těch bude n). Pak můžeme říci, že každou cestu z A do C můžeme symbolicky zapsat posloupností číslic 0 nebo 1 o celkovém počtu $m+n$ číslic. Jde tedy o kombinace n nul a m jedniček a platí, že z A do C se lze dostat $\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{m}$ způsoby.



Obrázek 2: K řešení příkladu 1

Pokud chceme jít z bodu $A[0,0]$ do $B[x,y]$ přes $C[m,n]$, kde $(m<x, n<y)$, pak úlohu rozdělíme na úseky z A do C a z C do B. Výsledný počet možných cest tedy bude

$$\binom{m+n}{n}\cdot\binom{(x-m)+(y-n)}{y-n}.$$

2. Ve starobylé vesnici žije blíže neurčený počet mudrců. Každý mudrc má právě jednu manželku. Každý mudrc ví, zda jsou manželky ostatních mudrců svým mužům věrné, či nikoliv. O věrnosti své manželky však nic neví. Ve vesnici platí pravidlo, že vždy, když nějaký mudrc zjistí, že mu je jeho žena nevěrná, musí ji do konce toho dne zabít.

   Jednoho dne přijde do vesnice cizinec a napíše na bránu: „Ne všechny manželky mudrců jsou věrné.“ Ponechejme stranou, jak to zjistil, a předpokládejme, stejně jako mudrcové, že je tato informace pravdivá.

   První den se nestalo nic. Druhý den se nestalo nic. A tak dále, třetí, čtvrtý, pátý ani šestý den se nic nestalo. Až na konci sedmého dne několik mudrců zabilo své ženy. Kolik žen bylo zabito? Byly zabity všechny nevěrné manželky?

   Řešení:

   Zadání sice obsahuje minimum konkrétních informací, ale i přesto je úloha snadno řešitelná principem podobným matematické indukci.

   Předpokládejme, že by byla ve vesnici právě jedna nevěrná manželka. Mudrc, jehož žena je nevěrná, si přečte vzkaz na bráně. Vzhledem k tomu, že má informace o věrnosti všech ostatních manželek (čili ví, že všechny ostatní jsou věrné), je mu jasné, že tou nevěrnicí je právě jeho žena a musí ji ještě toho dne zabít. Jenže první den se nic nestalo.

   Předpokládejme, že by byly ve vesnici právě dvě nevěrné manželky. Mudrc s nevěrnou manželkou bude druhý den uvažovat následovně: mám informace o věrnosti všech ostatních manželek a vím, že jedna z nich je nevěrná. Jenže dotyčný mudrc (který musel uvažovat tak, jak je naznačeno v předchozím kroku) ji první den nezabil, tj. ve vesnici musí být ještě jedna nevěrná manželka. A to musí být ta moje. Čili ji musím ještě ten den zabít. Jenže ani druhý den se nic nestalo.

   Uplatníme-li stejnou úvahu na další dny, je jasné, že sedmý den bylo zabito právě sedm manželek a žádná jiná nevěrnice už ve vesnici není.

3. Továrna vyrábí dva druhy hraček – vojáčky a vláčky. Zisk z prodeje jednoho vojáčka je 30 Kč, zisk z prodeje jednoho vláčku je 20 Kč. K výrobě jednoho vojáčka je potřeba 1 hodina obrábění a 2 hodiny dokončování, k výrobě jednoho vláčku je potřeba 1 hodina obrábění a 1 hodina dokončování. Kapacita obrábění je 80 hodin týdně, kapacita dokončování je 100 hodin týdně. Kolik se má v továrně za týden vyrobit vojáčků a vláčků, jestliže se má maximalizovat zisk? Jak velký tento zisk bude za týden?

   Řešení:

   Počet vyrobených vojáčků označme x_1, počet vyrobených vláčků označme x_2. Celkový zisk určíme pomocí tzv. účelové funkce z, kde $z = 30x_1 + 20x_2$. Omezení kapacity obrábění a dokončování vede na dvě nerovnice ve tvaru $x_1 + x_2 \leq 80$ a $2x_1 + x_2 \leq 100$. Navíc z podstaty zadání vyplývá, že hodnoty x_1 a x_2 musí být nezáporné a celočíselné, protože určují počty kusů. Matematický model zadané optimalizační úlohy formulujeme následujícími vztahy.

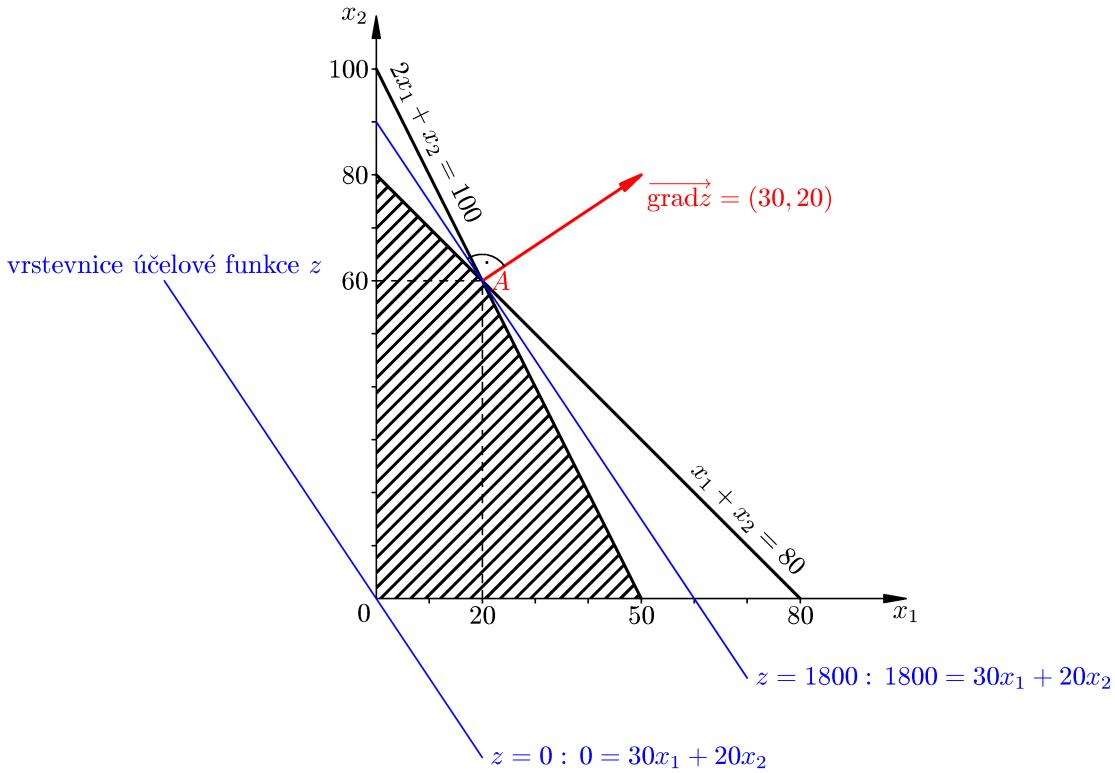
$$\text{Hledané maximum účelové funkce } z\text{:} \quad \max_{x_1,\,x_2} z \equiv \max_{x_1,\,x_2}(30x_1 + 20x_2)$$

$$\text{Zadané podmínky:} \quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 80 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1,\, x_2 &\geq 0 \\ x_1,\, x_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

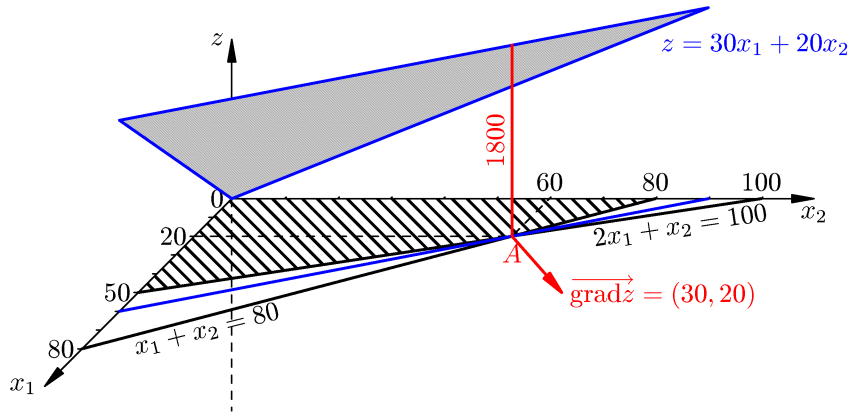
   Pokud vyšrafujeme množinu, kterou uvedené nerovnice představují, tak dostaneme čtyřúhelník přípustných řešení, viz Obrázek 3. Zbývá tedy najít bod, který leží ve vyšrafovaném čtyřúhelníku a zároveň jeho z-ová souřadnice je maximální.

   Pokusme se představit si tuto situaci i v prostoru, v souřadném systému x_1, x_2, z, viz Obrázek 4.

   Představme si plochu, kde význam z-tové souřadnice bude náš zisk, x_1-ové počet vláčků a x_2-ové počet vojáčků. Rovnice této plochy je $z = 30x_1 + 20x_2$. Jde tedy o rovinu, která prochází počátkem souřadného systému a směr jejího největšího růstu je určen vektorem, který označíme $\overrightarrow{\text{grad}z} = (30, 20)$. Jde nám



Obrázek 3: Grafické řešení příkladu 3 - pohled do roviny x_1, x_2



Obrázek 4: Grafické řešení příkladu 3 - situace v prostoru

o nejvyšší zisk, proto se snažíme najít vrstevnici účelové funkce, která prochází „co nejvzdálenějším“ bodem vyšrafované oblasti.

Z obrázku je zřejmé, že jde o bod $[x_1, x_2] = [20, 60]$. Nejlepší je tedy vyrábět 20 vojáčků a 60 vláčků týdně, přičemž zisk bude 1800 Kč.

4. „A kolik je tvým třem synům vlastně let?“ zeptal se matematik kamaráda. Ten chtěl matematika potrápit, a tak odpověděl: „Když znásobím jejich věk, dostanu číslo 36.“ Matematik se na chvíli zamyslel a řekl: „Ale z toho přece jejich věk určit nemohu, musíš mi říci něco bližšího.“ Kamarád jeho žádost splnil: „Součet jejich stáří se rovná číslu domu, před nímž stojíme.“ Matematik se znovu na chvíli zamyslel a otázal se: „Nemůžeš mi říci ještě nějakou podrobnost?“ „Ale ano,“ odpověděl kamarád, „Nejstarší Pavel slaví narozeniny v létě a ti dva mladší na podzim.“ „Tak to mně stačí,“ odpověděl matematik. Stačí to i vám k odpovědi? Kolik let je každému synovi?

   Řešení:

   Z první odpovědi plyne, že hledáme tři přirozená čísla, jejichž součin je 36. Vypišme si všem osm možností

$$\begin{gathered} 1 \cdot 1 \cdot 36 \\ 1 \cdot 2 \cdot 18 \\ 1 \cdot 3 \cdot 12 \\ 1 \cdot 4 \cdot 9 \\ 1 \cdot 6 \cdot 6 \\ 2 \cdot 2 \cdot 9 \\ 2 \cdot 3 \cdot 6 \\ 3 \cdot 3 \cdot 4 \end{gathered}$$

   Z druhé odpovědi vyplývá, že součet jejich věku se rovná číslu domu, které zná matematik, ale my ho neznáme. Sečteme-li čísla v každé výše uvedené trojici, dostaneme postupně součty

$$38,\ 21,\ 16,\ 14,\ 13,\ 13,\ 11,\ 10.$$

   Všimněme si, že s výjimkou čísla 13, jsou všechny ostatní součty různé a matematik by tedy mohl určit stáří synů již po této odpovědi, protože číslo domu zná. Protože však matematik vyžadoval další nápovědu, mohlo to být jen z toho důvodu, že dům měl číslo 13, čemuž odpovídají dvě různé možnosti: 1, 6, 6 let a 2, 2, 9 let. Na základě třetí odpovědi lze vyloučit variantu 1, 6, 6 let, protože z informací vyplývá, že nejstarší syn Pavel slaví narozeniny sám. Zbývá tedy jediná možnost a to ta, že synové byli staří 2, 2 a 9 let.

5. Kolik má číslo 2009^{2009} cifer?

   Řešení:

   Počet cifer určíme jednoduchým výpočtem za pomoci dekadického logaritmu

$$\log 2009^{2009} = 2009 \log 2009 \cong 2009 \cdot 3,30298 = 6635,68682.$$

   Nalezneme-li nejbližší vyšší celé číslo dostáváme výsledek. Počet cifer tedy je 6636.

   Skutečně, výpočet je takto snadný. Stačí si uvědomit, jak funguje dekadický logaritmus, tj. logaritmus o základu 10: Pro přirozená čísla z množiny $\{1, ..., 9\}$ dostáváme funkční hodnoty $\{\log 1 = 0, ..., \log 9 \doteq 0,954\}$. Pro dvojciferná čísla $\{10, ..., 99\}$ dostáváme funkční hodnoty $\{\log 10 = 1, ..., \log 99 \doteq 1,996\}$. A tak dále. Tj. nejbližší vyšší celé číslo k výsledku dekadického logaritmu vždy udává počet cifer čísla, jehož logaritmus počítáme.

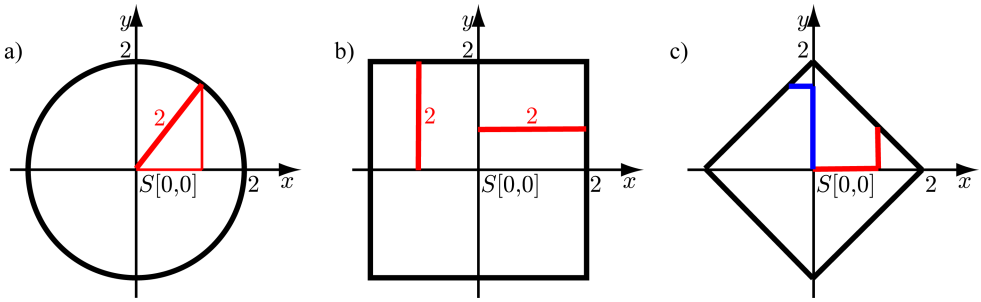
6. Zakreslete do souřadného systému kružnici se středem v bodě $S = [0, 0]$ a poloměrem 2 jednotky, je-li vzdálenost bodů $A = [a_1, a_2]$ a $B = [b_1, b_2]$ definována takto:

   a) $d(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (a_i - b_i)^2} \equiv \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$,

   b) $d(A, B) = \max_{i=1,2} |a_i - b_i| \equiv \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$,

   c) $d(A, B) = \sum_{i=1}^{2} |a_i - b_i| \equiv |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$.

Řešení:



Obrázek 5: Řešení příkladu 6

7. Dokažte následující nerovnost

$$\frac{27}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2} \leq a^2+b^2+c^2 \quad \text{pro } \forall a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Řešení:

Danou nerovnost dokážeme pomocí nerovnosti mezi harmonickým a kvadratickým průměrem prvků $a_1, \ldots, a_n$. Pro úplnost uveďme nerovnosti i mezi dalšími známějšími průměry. Platí

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}},$$

tj.

$$\text{harmonický p.} \leq \text{geometrický p.} \leq \text{aritmetický p.} \leq \text{kvadratický p.}$$

Zaměřme se na nerovnost mezi kvadratickým a harmonickým průměrem. Pro 3 prvky $a, b, c \in \mathbb{N}$ dostáváme tuto nerovnost ve tvaru

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Obě strany jsou vždy kladné, proto platí

$$\left(\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

$$\frac{9}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

$$\frac{27}{(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2} \leq a^2+b^2+c^2.$$

A tím je důkaz hotov.

8. Na oslavu jsou pozvány manželské páry. Při slavnostní večeři usadíme hosty tak, aby dámy seděly na jedné straně obdélníkového stolu a pánové seděli naproti nim. (Předpokládejme, že podél jedné strany stolu je právě n míst na sezení.) Žádný z manželů ovšem nesmí sedět naproti vlastní partnerce. Kolik možností na rozsazení má hostitel na večírku, kde je n párů?

Řešení:

Počet možností na rozsazení dam podél jedné strany obdélníkového stolu je $n!$ Obdélníkový stůl má dvě strany, které pro dámy přicházejí v úvahu, takže dostáváme $2n!$ možností.

Nyní je nutné zjistit počet možností, jak můžeme rozsadit pány tak, aby žádný z nich neseděl naproti vlastní partnerce. To však nejde jednoduše spočítat přímo. Je nutné zjistit počet rozsazení, kdy alespoň jeden pár sedí naproti sobě, a toto číslo odečíst od všech možností, kterých je opět $n!$

Vezměme množinu, do které zařadíme nám „příznivá“ rozsazení, tj. taková rozsazení, kdy alespoň jeden pár sedí naproti sobě a spočtěme počet jejích prvků. Tuto množinu (označme ji A) lze vyjádřit jako sjednocení n množin

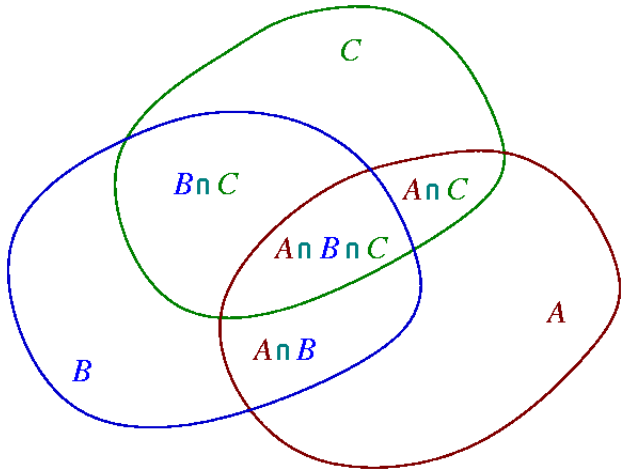
$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i,$$

kde každá množina A_i $(i = 1, \ldots, n)$ obsahuje taková rozsazení, že pár i sedí naproti sobě.

Tyto množiny samozřejmě nejsou disjunktní (nemají prázdný průnik), takže počet prvků množiny A musíme určit pomocí principu exkluze a inkluze. To znamená, že spočteme počet možností, jak vybrat jednoho pána, který bude sedět naproti vlastní partnerce a ten násobíme počtem možností, jak rozsadit ostatní pány. Od výsledku odečteme počet možností, jak vybrat dva pány, kteří budou sedět naproti vlastní partnerce, násobený počtem možností, jak rozsadit zbývající pány. K výsledku opět přičteme počet možností, jak vybrat tři pány, kteří budou sedět naproti vlastní partnerce, násobený počtem možností, jak rozsadit zbývající pány. A tak dále. Tedy

$$\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)!$$

Celý proces můžeme pro jednoduché pochopení demonstrovat na Obrázku 6.



Obrázek 6: K řešení příkladu příkladu 8

Známe počet prvků v množinách A, B a C, a chceme spočítat počet prvků ve sjednocení těchto množin. Nestačí jen sečíst počet prvků v jednotlivých množinách, protože množiny nejsou disjunktní a tím pádem započítáme každou z množin $A \cap B$, $A \cap C$ a $B \cap C$ dvakrát. Je tedy nutné od původního součtu odečíst počty prvků v těchto množinách. Tím pádem ale „ztratíme“ prvky v množině $A \cap B \cap C$ a je tedy potřeba je opět přičíst. Zobecněním tohoto principu dostáváme výše uvedený výpočet. Jednoduchými úpravami nyní dostaneme

$$\binom{n}{1}(n-1)! - \binom{n}{2}(n-2)! + \binom{n}{3}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n+1}\binom{n}{n}(n-n)! =$$

$$= \frac{n!}{1!(n-1)!}(n-1)! - \frac{n!}{2!(n-2)!}(n-2)! + \frac{n!}{3!(n-3)!}(n-3)! - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n!(n-n)!}(n-n)! =$$

$$= \frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n!}.$$

Toto číslo vyjadřuje počet možností, jak rozsadit pány tak, aby alespoň jeden z nich seděl naproti vlastní ženě. Celkový počet na rozsazení všech lidí podle zadání dostaneme jako

$$\begin{aligned}
2n!\left(n! - \left(\frac{n!}{1!} - \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{n!}{n!}\right)\right) &= \\
= 2n!\left(\frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \frac{n!}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{n!}{n!}\right) &= \\
= 2\,(n!)^2\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^{n}\frac{1}{n!}\right).
\end{aligned}$$

Poznámka k řešení příkladu 8:

Příklad lze řešit rovněž pomocí méně známého pojmu *subfaktoriál* (označení $!n$). Subfaktoriál totiž vyjadřuje přímo počet tzv. *dismutací*, což jsou takové permutace původní množiny, že žádný prvek nezůstane na svém místě.

Počet dismutací pro n-prvkovou množinu je dán rekurentním vztahem $!n = (n-1)\big(!(n-1)+!(n-2)\big)$ s počátečními podmínkami $!0 = 1$ a $!1 = 0$.

Počet rozsazení, které vyhovují zadání úlohy, je pak $2 \cdot n! \cdot !n$.

9. Zkuste si „kouzlo“ s kalkulačkou. Vyberte si libovolný úhel nejlépe v radiánech, například $x_0 = 1,2$. Na kalkulačce si spočítejte jeho kosinus, dále určete kosinus vašeho výsledku a toto proveďte ještě několikrát (zkuste například 30krát). Provedete tedy operaci $\cos(\cos(\ldots\cos(\cos(x_0))))$.

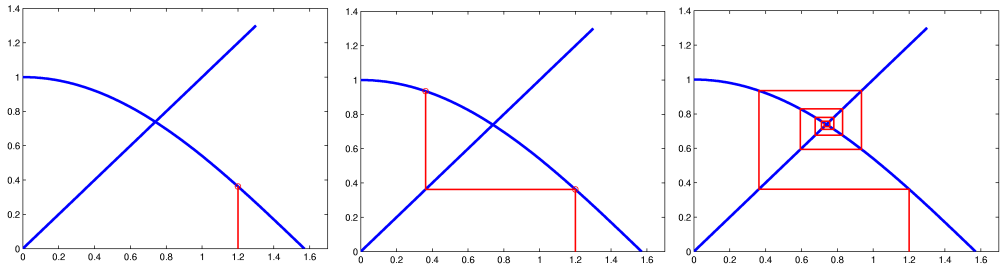
   Výsledky na displeji se budou blížit k jednomu určitému číslu. Pokud si tento pokus vyzkoušíte ještě několikrát, tak brzy zjistíte, že nezáleží na velikosti úhlu, se kterým jste začali.

   Pomocí grafu funkce kosinus vysvětlete tuto záhadu.

   Řešení:

   Zvolme libovolně počáteční hodnotu úhlu v radiánech, například $x_0 = 1,2$. Vykresleme graf funkce $f(x) = \cos x$ a „pomocné“ funkce $g(x) = x$ (její účel se ukáže později), viz Obrázek 7. V grafu vyznačme hodnotu

$$x_1 = \cos x_0.$$



Obrázek 7: K řešení příkladu 9

Nyní využijeme graf pomocné funkce $g(x)$ k tomu abychom graficky mohli znázornit

$$x_2 = \cos x_1 = \cos(\cos x_0).$$

Stejným způsobem pokračujeme dále a vynášíme další body.

Teď už je zcela jasné, ke kterému bodu se blíží naše výsledky. Jedná se o průsečík funkce $f(x) = \cos x$ a funkce $g(x) = x$. Tedy jde o řešení rovnice

$$\begin{aligned}
x &= \cos x \\
x &\doteq 0,7391
\end{aligned}$$

10. Televizní soutěž probíhá následujícím způsobem: Soutěžící má před sebou troje zavřené dveře. Za jedněmi z nich je nové auto, za zbývajícími je jen koza. Soutěžící si zvolí jedny dveře a na závěr soutěže dostane to, co je za nimi. Soutěžící samozřejmě neví, co které dveře skrývají, a musí tedy volit náhodně.

    Poté, co si soutěžící vybere svoje dveře, moderátor pořadu otevře jedny ze zbývajících dveří. Vždy ty, za kterými je koza, protože moderátor ví, co které dveře skrývají. Moderátor dá nyní soutěžícímu možnost změnit svoji původní volbu a vybrat si jiné dveře.

    Předpokládejme, že soutěžící chce auto. Je tedy pro něj z hlediska pravděpodobnosti výhodnější ponechat si svoji první volbu? Nebo je výhodnější svoji původní volbu po zásahu moderátora změnit? Nebo je pravděpodobnost, že získá auto v obou případech stejná?

    Řešení:

    Mohlo by se zdát, že v momentě, kdy jsou jedny dveře s kozou otevřené, je to pro soutěžícího padesát na padesát a že je tedy jedno, co udělá. Ale není tomu tak. Z hlediska pravděpodobnosti je pro soutěžícího výhodné svoji volbu vždy změnit.

    Na začátku máme jedny dveře s autem a dvoje dveře s kozou. Tedy pravděpodobnost, že si soutěžící vybere dveře s autem, je 1/3. Pravděpodobnost, že je auto za jedněmi ze zbývajících dveří, je 2/3. Vzhledem k tomu, že poté moderátor vždy, úmyslně a najisto otevře dveře s kozou, nedává soutěžícímu žádnou novou informaci o tom, co je za dveřmi, které si vybral. Tedy pravděpodobnost, že si soutěžící vybral dveře s autem, je stále 1/3. Proto se tedy vyplatí svoji volbu změnit - druhé dveře totiž skrývají auto s pravděpodobností 2/3.

    Jedná se o tzv. Monty Hall problem, více informací např. na
    `http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`