Internetová matematická olympiáda - 30. listopadu 2010

3. ročník

1. Do internetové matematické olympiády se přihlásilo 121 týmů. Jedním z těchto týmů je tým kapitána Filipa Chytrého. Olympiáda obsahuje celkem 5 příkladů. Stručná idea, týkající se hodnocení příkladů je tato: kompletně vyřešený příklad je ohodnocen koeficientem 1,00 a například z poloviny vyřešený příklad je ohodnocen koeficientem 0,50. Výsledná bodová hodnota příkladu je nepřímo úměrná počtu úspěšných řešitelů (viz Pravidla Internetové matematické olympiády). Kapitán Chytrý svému týmu velmi věří. Ví, že by byli schopni spočítat všech pět příkladů kompletně, ale potřebovali by na to více času. Ví, že ve stanoveném čase zvládne právě 3 příklady (kompletně). Proto po přečtení zadání všech příkladů udělá tento odhad, týkající se schopností zbývajících 120ti týmů:

   - 1. příklad vyřeší polovina týmů s koeficientem 1,00, čtvrtina s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 2. příklad vyřeší $\frac{1}{10}$ týmů s koeficientem 1,00, $\frac{1}{2}$ zbytku týmů s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 3. příklad vyřeší 30 týmů s koeficientem 1,00, $\frac{5}{6}$ zbytku týmů s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 4. příklad vyřeší $\frac{3}{8}$ týmů s koeficientem 1,00, $\frac{1}{4}$ s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.
   - 5. příklad vyřeší $\frac{1}{8}$ týmů s koeficientem 1,00, $\frac{1}{5}$ s koeficientem 0,50 a ostatní za 0,00.

   Kapitán Chytrý zvolí strategii, která povede k maximálnímu možnému zisku bodů pro jeho tým. Rozhodněte, kterým příkladům má tým Filipa Chytrého věnovat maximální pozornost.

Řešení příkladu 1

Je zřejmé, že v součtu získá tým nejvíce bodů za ty tři příklady, které budou mít nejvyšší bodovou hodnotu. Tedy půjde o příklady, které správně vyřeší (nebo vyřeší jejich podstatnou část) nejméně týmů.

Určeme tedy bodovou hodnotu každého příkladu v souladu s Pravidly. Víme, že za 1. příklad získá koeficient 1,00 celkem 60 týmů a koeficient 0,50 celkem 30 týmů. Zbývajících 30 týmů získává koeficient 0,00. Celková bodová hodnota každého příkladu je 100 bodů, ale tato bodová hodnota klesá v závislosti na počtu úspěšných řešitelů. Skutečnou bodovou hodnotu 1. příkladu vypočteme vztahem

$$100 \text{ bodů } : (60 \cdot 1,00 + 30 \cdot 0,50 + 30 \cdot 0,00) = 100 \text{ bodů } : 75,00 = 1,33 \text{ bodu.}$$

Zapišme si bodové hodnoty jednotlivých příkladů pro přehlednost do tabulky 1.

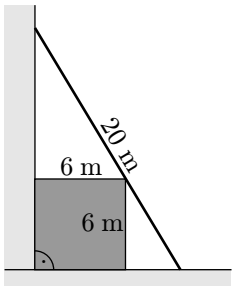
	součet koeficientů všech týmů	bodová hodnota příkladu
1. příklad	$60 \cdot 1,00 + 30 \cdot 0,50 + 30 \cdot 0,00 = 75,00$	$100 : 75,00 = 1,33$ bodu
2. příklad	$12 \cdot 1,00 + 54 \cdot 0,50 + 54 \cdot 0,00 = 39,00$	$100 : 39,00 = 2,56$ bodů
3. příklad	$30 \cdot 1,00 + 75 \cdot 0,50 + 15 \cdot 0,00 = 67,50$	$100 : 67,50 = 1,48$ bodu
4. příklad	$45 \cdot 1,00 + 30 \cdot 0,50 + 45 \cdot 0,00 = 60,00$	$100 : 60,00 = 1,67$ bodu
5. příklad	$15 \cdot 1,00 + 24 \cdot 0,50 + 81 \cdot 0,00 = 27,00$	$100 : 27,00 = 3,70$ bodů

Tabulka 1: K řešení příkladu 1

Tým dosáhne nejlepšího hodnocení, pokud kompletně a správně vypočítá příklad 2., 4. a 5.

2. Tyč délky 20 m je svým horním koncem opřená o zeď a zároveň se dotýká bedny o rozměrech 6 m × 6 m, viz Obrázek 1. V jaké výšce se nachází horní konec tyče?

   Poznámka: Tento příklad je možno řešit několika více či méně elegantními způsoby. Týmy, které řešení povedou přes rovnici čtvrtého stupně, kterou následně vyřeší pouze přibližně numericky, získají za příklad koeficient maximálně 0,50.

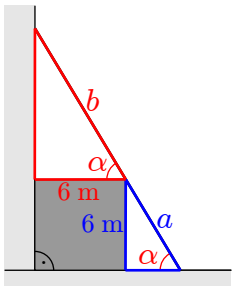


Obrázek 1: K zadání příkladu 2

Řešení příkladu 2

Uveďme si dva možné elegantní přístupy k řešení.

1. způsob (pomocí goniometrických funkcí):



Obrázek 2: K 1. způsobu řešení příkladu 2

Na Obrázku 2 jsou vyznačeny dva pravoúhlé trojúhelníky s jedním vnitřním úhlem α. Platí

$$\sin\alpha = \frac{6}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{6}{b}, \quad a + b = 20.$$

Provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned}
\tfrac{6}{\sin\alpha} + \tfrac{6}{\cos\alpha} &= 20 \\
\tfrac{6\cos\alpha + 6\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} &= 20 \\
6(\sin\alpha + \cos\alpha) &= 20\sin\alpha\cos\alpha \\
6(\sin\alpha + \cos\alpha) &= 10 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha \\
6(\sin\alpha + \cos\alpha) &= 10\sin 2\alpha \\
36(\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) &= 100\sin^2 2\alpha \\
9(1 + \sin 2\alpha) &= 25\sin^2 2\alpha \\
25\sin^2 2\alpha - 9\sin 2\alpha - 9 &= 0
\end{aligned}$$

Zavedením substituce $t = \sin 2\alpha$ získáme kvadratickou rovnici

$$25t^2 - 9t - 9 \quad = \quad 0,$$

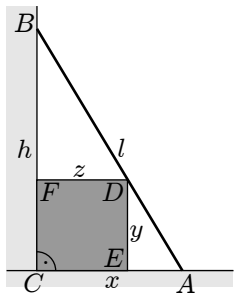
jejímž řešením je $t_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{981}}{50}$, tedy $t_1 = \dfrac{9 + \sqrt{981}}{50} \doteq 0,8064$ a $t_2 = \dfrac{9 - \sqrt{981}}{50} \doteq -0,4464$. Zápornou hodnotu t_2 dále neuvažujeme. Ze substituce vyplývá

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= \frac{9 + \sqrt{981}}{50} \\ \text{Tedy pro úhel } \alpha \text{ platí:} & \\ 2\alpha_1 &= 53,7475^\circ \\ \alpha_1 &= 26,8737^\circ \\ \text{nebo} & \\ 2\alpha_2 &= 180^\circ - 53,7475^\circ \\ 2\alpha_2 &= 126,2525^\circ \\ \alpha_2 &= 63,1263^\circ \end{aligned}$$

Výšku, do které tyč dosáhne, vypočteme jako $6 + 6\tan\alpha$. Tedy pro α_1 vychází dosažená výška 9,04 m a pro α_2 vychází dosažená výška 17,84 m.

2. způsob (pomocí obsahů trojúhelníků):

Označme si délku tyče $AB = l$, výšku bedny $ED = y$, šířku bedny $DF = z$. Dále pak výšku, do které tyč dosáhne $BC = h$ a vzdálenost $AC = x$, viz Obrázek 3.



Obrázek 3: Ke 2. způsobu řešení příkladu 2

Použitím Pythagorovy věty dostáváme rovnici

$$x^2 + h^2 = l^2. \tag{1}$$

Dále si rozložme obsah trojúhleníku ABC na součet obsahů trojúhleníků AED, DFB a čtverce $ECFD$, obecně tedy platí

$$\begin{array}{rcccccc} S_{ABC} & = & S_{AED} & + & S_{DFB} & + & S_{ECFD}, \\ \frac{xh}{2} & = & \frac{(x-z)y}{2} & + & \frac{z(h-y)}{2} & + & yz. \end{array}$$

Po dosazení konkrétních zadaných hodnot $y = z = 6$ dostáváme

$$xh = 6(x + h). \tag{2}$$

Přičtením dvojnásobku rovnice (2) k rovnici (1) získáme

$$x^2 + 2xh + h^2 = 12(x + h) + l^2,$$

tedy

$$(x + h)^2 = 12(x + h) + l^2. \tag{3}$$

Zavedením substituce $\xi = x + h$ dostáváme z rovnice (3) kvadratickou rovnici

$$\xi^2 - 12\xi - 400 = 0,$$

jejímž řešením je

$$\xi_{1,2} = 6 \pm \sqrt{436}.$$

Získali jsme dvě různá reálná řešení, avšak geometrický význam má pro nás pouze kladné řešení $\xi_1 = 6 + \sqrt{436}$.

Nyní vypočteme neznámou h dosazením vypočteného ξ_1 do rovnic

$$x + h = \xi,$$

$$xh = 6\xi,$$

což je rovnice zavedené substituce a rovnice (2). Z první rovnice si vyjádříme neznámou $x = \xi - h$ a dosadíme do druhé rovnice, čímž dostaneme následující kvadratickou rovnici

$$h^2 - h\xi + 6\xi = 0.$$

Za ξ dosadíme vypočtenou hodnotu $\xi_1 = 6 + \sqrt{436}$ a dostáváme jako řešení dva různé kladné kořeny

$$\begin{aligned} h_{1,2} &= \frac{6 + \sqrt{436} \pm \sqrt{(6 + \sqrt{436})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (6 + \sqrt{436})}}{2} = \\ &= 3 + \sqrt{109} \pm \sqrt{82 - 3\sqrt{436}}. \end{aligned}$$

Pro lepší představu vyjádřeme tato čísla v desetinách jako $h_1 \doteq 17,84$ a $h_2 \doteq 9,04$. Tyč se tedy opírá o zeď ve výšce 9,04 metrů nebo 17,84 metrů.

3. Dlaždič psal objednávku čtvercových dlaždic na vydláždění podlahy čtvercové místnosti. Byl tak roztržitý, že místo počtu dlaždic potřebných podél jedné stěny napsal do objednávky svůj věk. Následně mu dovezli o 1111 dlaždic víc, než bylo potřeba. Jak byl dlaždič starý?

Řešení příkladu 3

Označme x hledaný věk dlaždiče a y počet dlaždic podél jedné stěny místnosti. Víme, že místnost je čtvercová a také dlaždice jsou čtvercové. Tudíž je na vydláždění potřeba y^2 dlaždic. Dlaždič ovšem objednal x^2 dlaždic. Rozdíl mezi přivezenými a skutečně potřebnými dlaždicemi byl 1111. Sestavíme tedy (nelineární) rovnici

$$x^2 - y^2 = 1111. \tag{4}$$

Zdá se, že máme málo informací k vyřešení jedné nelineární rovnice o dvou neznámých. Stačí si však uvědomit, že číslo 1111 se dá rozložit na součin právě dvou prvočísel a pro rozklad levé strany rovnice (4) je možné použít vzorec $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Tedy platí

$$(x + y)(x - y) = 101 \cdot 11.$$

Odtud

$$\begin{aligned} x + y &= 101, \\ x - y &= 11. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých x, y je $x = 56$ a $y = 45$. Dlaždičovi je 56 let.

4. Vyřešte algebrogram, tj. různá písmena nahraďte různými číslicemi 0 až 9 tak, aby byly splněny uvedené početní operace.

$$\begin{array}{ccccccccccc} A & B & C & - & D & E & C & = & F & F & G \\ & : & & & & + & & & & - & \\ & H & & \cdot & & E & C & = & E & G & A \\ \hline & J & A & + & D & A & B & = & K & C & C \end{array}$$

Řešení příkladu 4

Z rovnic v algebrogramu získáme jednodušší rovnice pro hledané hodnoty písmen.

Z rovnice $ABC - DEC = FFG$ v prvním řádku algebrogramu plyne $C - C = 0$, tedy $G = 0$.

Z rovnice $FFG - EGA = KCC$ v posledním sloupci algebrogramu a z $G = 0$ vyplývá

$$A + C = 10, \quad C + 1 = F, \quad K + E = F. \tag{5}$$

Z rovnice $JA + DAB = KCC$ v posledním řádku algebrogramu plyne

$$K = D + 1, \quad A + J > 10, \quad A + B > 10, \tag{6}$$

odkud

$$B + A = 10 + C, \quad A + J + 1 = 10 + C \quad \Rightarrow \quad B = J + 1. \tag{7}$$

Z rovnice $ABC - DEC = FFG$ v prvním řádku algebrogramu také vyplývá

$$DE + FF = AB. \tag{8}$$

Nevíme však, jestli $E + F > 10$ nebo $E + F < 10$. Proto následující výpočet provedeme pro oba případy:

a) Nejprve tedy uvažujme $E + F < 10$. Pak z (8) plyne

$$D + F = A, \tag{9}$$

což si pomocí výše odvozených vztahů (5) můžeme přepsat jako

$$C + 1 + D = 10 - C, \quad \text{tedy} \quad D = 9 - 2C.$$

b) Pokud $E + F > 10$, pak z (8) plyne

$$D + F + 1 = A, \tag{10}$$

odkud z (5) dostaneme

$$D = A - 1 - F = 10 - C - 1 - F = 10 - C - 1 - C - 1 = 8 - 2C.$$

Na základě variant a) a b) vidíme, že bez ohledu na hodnotu součtu $E + F$ platí, že $C < 5$.

Z rovnice $DEC + EC = DAB$ v prostředním sloupci algebrogramu (respektive z odvozeného vztahu $EC + EC = AB$) potom plyne

$$C + C = B \quad \text{a} \quad E + E = A. \tag{11}$$

Nyní postupně využitím všech získaných vztahů dostaneme podmínky pro jednotlivá písmena

$$\begin{aligned}
C < 5,\ \ A + C = 10,\ \ A = 2E \quad &\Rightarrow \quad A \in \{6, 8\} \qquad\qquad \Rightarrow \quad E \in \{3, 4\} \\
F = C + 1 \quad &\Rightarrow \quad F \in \{2, 3, 4, 5\} \\
F + E < 10, D = 9 - 2C \quad &\Rightarrow \quad D \in \{1, 3, 5, 7\} \\
K = D + 1 \quad &\Rightarrow \quad K \in \{2, 4, 6, 8\} \\
E + K = F \quad &\Rightarrow \quad F = 5,\ \ K = 2,\ \ E = 3
\end{aligned}$$

Po vyčíslení dalších hodnot získáme

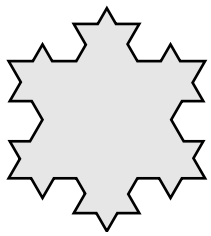
$$C = F - 1 = 4, \quad B = 2C = 8, \quad A = 10 - C = 6, \quad D = K - 1 = 1, \quad J = B - 1 = 7.$$

Z rovnice $ABC : H = JA$ v prvním sloupci algebrogramu a platnosti $G = 0$ plyne, že $H = \frac{684}{76} = 9$.

Celý algebrogram má tedy řešení

$$\begin{array}{ccccccccccc}
6 & 8 & 4 & - & 1 & 3 & 4 & = & 5 & 5 & 0 \\
 & : & & & & + & & & & - & \\
 & 9 & & \cdot & & 3 & 4 & = & 3 & 0 & 6 \\
\hline
 & 7 & 6 & + & 1 & 6 & 8 & = & 2 & 4 & 4
\end{array}$$

5. Uvažujme rovinný útvar, který vznikne následující konstrukcí: vyjdeme z rovnostranného trojúhelníku, jehož strany rozdělíme na třetiny. Nad prostřední třetinou každé strany vztyčíme opět rovnostranný trojúhelník a původní prostřední třetinu vyjmeme. Tento postup nyní opakujeme až do nekonečna. (Na Obrázku 4 je uvažovaný obrazec zobrazen po dvou krocích.) Vypočítejte obvod a obsah tohoto útvaru.



Obrázek 4: K zadání příkladu 5

Řešení příkladu 5

Výsledný útvar se nazývá Kochova vločka (anglicky Koch snowflake) a patří k tzv. fraktálům. Sledujme tedy konstrukci tohoto fraktálu. V „nultém kroku“ označme a délku strany původního rovnostranného trojúhelníku a S_0 jeho obsah, pro který platí

$$S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Při přechodu z jednoho kroku na další platí následující:

1) Délka strany trojúhelníka sestrojeného v novém kroku je vždy rovna jedné třetině délky strany trojúhelníka z předcházejícího kroku. Obecně má tedy strana trojúhelníka po n krocích délku $\frac{a}{3^n}$.

2) Počet stran objektu v následujícím kroku je vždy roven čtyřnásobku počtu stran z předcházejícího kroku, obecně máme tedy po n krocích $3 \cdot 4^n$ stran.

3) Část obvodu, která vždy „přibude“ novým krokem, spočteme jako počet stran v předcházejícím kroku násobený jednou třetinou délky strany v předcházejícím kroku, tj. $3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{3^{n-1}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} a$.

4) Část obsahu, která vždy „přibude“ novým krokem, spočteme jako počet stran v předcházejícím kroku násobený $\frac{1}{9^n}$ původního obsahu S_0 (útvar má v novém kroku třetinovou délku strany oproti kroku předchozímu, a tudíž nový vztyčený rovnostranný trojúhelník má devítinový obsah vůči předchozímu kroku). Dostáváme tedy $3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{S_0}{9^n} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n S_0$.

Obvod Kochovy vločky spočteme jako $3a + a \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$, což je geometrická řada s kvocientem $\frac{4}{3}$. Vzhledem k tomu, že je kvocient větší než jedna, tato řada diverguje k nekonečnu. Čili *Kochova vločka má nekonečně dlouhý obvod.*

Obsah Kochovy vločky spočteme následovně:

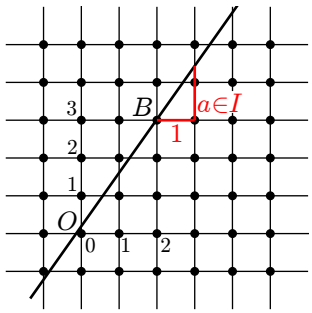
$$S_0 + \frac{3}{4} S_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = S_0 + \frac{3}{4} S_0 \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = S_0 + \frac{3}{4} S_0 \frac{4}{5} = S_0 + \frac{3}{5} S_0 = \frac{8}{5} S_0 = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$$

Vidíme tedy, že vločka má konečný obsah, ačkoli má nekonečně dlouhý obvod.

6. Uvažujme v rovině množinu bodů, jejichž obě souřadnice jsou celá čísla. Zvolme bod $B = [2; 3]$. Rozhodněte, zda v rovině bodů existuje přímka, která prochází bodem B a současně neprotne žádné další uvažované body. Své rozhodnutí zdůvodněte.

Řešení příkladu 6

Pokud tato přímka existuje, tak je zřejmé, že nemůže jít o přímku bez směrnice (ta by totiž protínala všechny body s x-ovou souřadnicí 2). Hledejme tedy přímku ve směrnicovém tvaru $y = kx + q$.



Obrázek 5: K řešení příkladu 6

Pro zjednodušení problému zkusme místo bodu B uvažovat bod $O = [0; 0]$. Přímka se směrnicí, která prochází počátkem O má rovnici $y = kx$. Pokud by směrnice k této přímky byla rovna racionálnímu číslu (tj. číslu, které se dá zapsat ve tvaru podílu dvou celých čísel, kde číslo ve jmenovateli je různé od nuly), tak by tato přímka procházela dalšími body s celočíselnými souřadnicemi.

Odtud tedy vychází řešení problému. Směrnice hledané přímky nemůže být racionální, tedy musí být iracionální.

Vraťme se nyní k hledané přímce procházející bodem $B = [2, 3]$. Nechť je tedy směrnice hledané přímky iracionální, označme ji a, viz Obrázek 5. Potom rovnice přímky bude $y = ax + b$, kde $a \in \mathbb{I}$. Dopočítáme hodnotu b, pro kterou platí $3 = a \cdot 2 + b$, tedy $b = 3 - a \cdot 2$. Hledaná přímka má rovnici

$$y = ax + 3 - 2a, \quad \text{kde} \quad a \in \mathbb{I}.$$

7. Nechť a, b, c jsou přirozená čísla, tj. $a, b, c \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Pomocí sumační symboliky zapište, kolik existuje řešení nerovnice

$$a + b + c \leq 100.$$

Řešení příkladu 7

Řešíme fixováním jednotlivých proměnných. Nechť $a = 1$, pak zbývá vyřešit nerovnici

$$b + c \leq 99.$$

Postup opět opakujme a položme $b = 1$. Pak dostáváme nerovnici

$$c \leq 98.$$

Tato nerovnice má zřejmě v oboru přirozených čísel právě 98 řešení a to pro hodnoty $c = 1, \ldots, 98$.

Pokračujme dále podobnou úvahou, tj. volme pevně $a = 1$ a $b = 2$, potom vychází $c = 1, \ldots, 97$ (tedy 97 možných řešení). Celkově tedy pro $a = 1$ máme $98 + 97 + 96 + \cdots + 3 + 2 + 1$ možných řešení. Jde o součet členů aritmetické posloupnosti, který určíme snadno jako

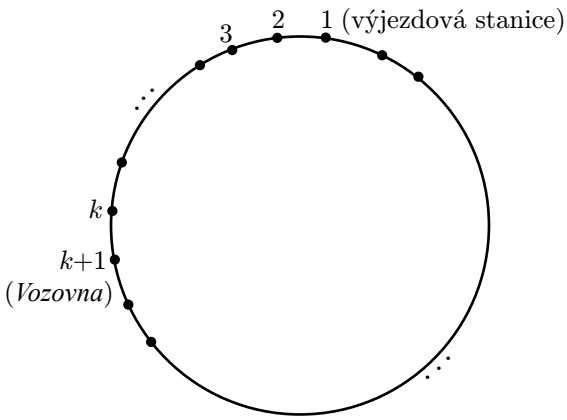
$$\sum_{k=1}^{98} k = \frac{98}{2}(98 + 1).$$

Pokud a zvýšíme o 1, pak počet řešení bude $97 + 96 + \cdots + 2 + 1$. Takto pokračujme až po $a = 98$. Pak najdeme pouze jedno řešení a to $b = c = 1$. Celkový počet řešení tedy bude součtem součtů členů těchto aritmetických posloupností, tedy

$$\sum_{k=1}^{98} \sum_{n=1}^{k} n = \sum_{i=1}^{98} \frac{i}{2}(i+1).$$

Počet řešení zadané nerovnice je po vyčíslení této sumy 161 700.

8. Tři řidiči jezdí na okružní lince autobusu v Brně. Každý z řidičů po této trase jede v jiný den a v jinou dobu, vždy ale začínají ve stejné výjezdové stanici č. 1. Po určitém počtu odpracovaných hodin dokončí okružní jízdu do stanice č. 1 a poté ještě ujedou k zastávek do stanice *Vozovna* (což je $(k+1)$. stanice na trase okružní linky). Viz Obrázek 6.



Obrázek 6: K zadání příkladu 8

Víme, že:

- První řidič ujel přesně 716 stanic a pak odešel ze stanice *Vozovna* domů.
- Druhý řidič si po ujetí $\sum_{l=1}^{20} l$ zastávek všiml, že stanici *Vozovna* přejel o k zastávek.
- Třetí řidič ví, že k je prvočíslo.

Jaké číslo má tedy stanice s názvem *Vozovna*?

Řešení příkladu 8

Označme si počet stanic na okružní lince n. Pak od řidičů víme, že:

- 716 stanic dá vyjádřit jako $n \cdot p + k$, kde číslo $p \in \mathbb{N}$ je počet okružních jízd, které vykonal první řidič.
- Číslo $\sum_{l=1}^{20} l = 210$ se dá vyjádřit jako $n \cdot q + 2k$, kde číslo q je počet okružních jízd, které vykonal druhý řidič.
- Třetí řidič je nadšený matematik a ví, že k je prvočíslo.

Vyjdeme tedy z následujících rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} n \cdot p & + & k & = & 716, \\ n \cdot q & + & 2k & = & 210. \end{array} \tag{12}$$

Z této soustavy dvou rovnic (12) eliminujeme neznámou k tak, že od druhé rovnice odečteme dvojnásobek rovnice první. Dostáváme

$$-1222 = n \cdot q - 2 \cdot n \cdot p = n \cdot (q - 2 \cdot p).$$

Odtud vidíme, že číslo 1222 musí být dělitelné číslem n. Rozložme číslo 1222 na prvočinitele, tedy

$$1222 = 2 \cdot 13 \cdot 47.$$

Vidíme tedy, že počet n stanic na okružní lince může nabývat hodnot $2, 13, 47, 26, 94, 611$ nebo 1222. Logicky vyloučíme čísla 1222 a 611, protože v tom případě by druhý řidič neujel ani jednu okružní jízdu. Nyní je potřeba zjistit, který počet stanic je tedy ten správný.

Vrátíme se opět k soustavě rovnic (12). Víme, že čísla p, q, k jsou přirozená a pro k platí, že $k < n$. Neboli můžeme říci, že po celočíselném dělení čísla 716 číslem n dostaneme zbytek k a po celočíselném dělení čísla 210 číslem n dostaneme zbytek $2k$. Pro přehlednost jednotlivá n a k nim odpovídající k zapíšeme do tabulky

n	k
2	0
13	1
47	11
26	neexistuje jednoznačně
94	neexistuje jednoznačně

Z tabulky vidíme, že jediné k, které je prvočíselné vychází pro $n = 47$. Proto zastávka *Vozovna* je 12. stanicí okružní linky.

Tato úloha jde řešit samozřejmě také pomocí tzv. kongruencí. Řekneme, že dvě čísla jsou kongruentní, pokud dávají stejný zbytek po celočíselném dělení nějakým daným číslem n. Toto číslo pak nazveme *modulo* a tím zavedeme tzv. modulární aritmetiku. Kongruence se zapisují takto:

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Tento zápis znamená, že a je kongruentní s b podle modulu n. Například čísla 3 a 8 jsou kongruentní podle modulu 5, protože obě dvě čísla mají po celočíselném dělení číslem 5 zbytek 3. Touto symbolikou tedy zapíšeme naše rovnice (12) od řidičů ve tvaru

$$\begin{aligned} 716 &\equiv k \pmod{n}, \\ 210 &\equiv 2k \pmod{n}. \end{aligned}$$

Kongruence mající stejné modulo lze sčítat podobně jako rovnice a dostaneme

$$1222 \equiv 0 \pmod{n}.$$

Zde pak podobně jako v předchozím případě vlastně určujeme jaké hodnoty může nabývat n a zpětně řešíme dvě kongruence o dvou neznámých.

9. Kolika různými způsoby je možné jedním tahem začínajícím v bodě A namalovat domeček uvedený na Obrázku 7? Uveďte nejen počet řešení, ale také systematický postup.

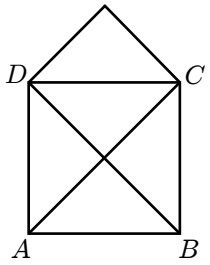
   Poznámka: V bodě „uvnitř“ domečku (v průsečíku úhlopříček) není možné měnit směr, tj. lze jít tahem z A přímo do C, ale nelze jít tahem z A do středu domečku a odtud do B a podobně.

Řešení příkladu 9

Tomuto grafu můžeme říkat Eulerovský, protože jde nakreslit jedním tahem (pro zajímavost si na například na internetu vyhledejte problém sedmi mostů města Královce) a platí pro něj, že má právě dva vrcholy lichého stupně (vychází z něj lichý počet cest) a zbývající vrcholy jsou sudého stupně.

Intuitivně je asi všem jasné, že musíme začít v jednom lichém vrcholu a skončit ve druhém. Začínáme-li v A, pak musíme skončit v B.

Projdeme pro ukázku jednu cestu a nakreslíme domeček celý. Pro další popis cest budeme vždy za cestu z bodu do bodu považovat nejpřímější cestu, která neprochází jiným písmenem označeným bodem. Začneme v bodě A, půjdeme do bodu D a pak do bodu B. Zde máme 2 možnosti jak se dostat do C a to buď vzhůru udělat jeden krok nebo jít doleva a našikmo doprava. Zvolíme například přímo nahoru. Vytvořili



Obrázek 7: K zadání příkladu 9

1. cesta:	Z bodu A do	B přímo a z B do	C přímo a z C do	D „přes střechu“ domečku
2. cesta:				D přímo
3. cesta:				D přes bod A
4. cesta:			D přímo a z D do	C „přes střechu“ domečku
5. cesta:				C přímo
6. cesta:				C přes bod A
7. cesta:		C přímo a z C do	D „přes střechu“ a z D do	B přímo
8. cesta:				B přes bod C
9. cesta:				B přes bod A
10. cesta:			D přímo a z D do	B „přes střechu“ domečku a bod C
11. cesta:				B přímo
12. cesta:				B přes bod A
13. cesta:			B přímo a z B do	D přímo
14. cesta:				D přes bod A
15. cesta:		D přímo a z D do	C „přes střechu“ a z C do	B přímo
16. cesta:				B přes bod D
17. cesta:				B přes bod A
18. cesta:			C přímo a z C do	B „přes střechu“ domečku a bod D
19. cesta:				B přímo
20. cesta:				B přes bod A
21. cesta:			B přímo a z B do	C přímo
22. cesta:				C přes bod A

Tabulka 2: Strom řešení příkladu 9

jsme tím graf podobající se písmenu N. Teď máme 2 možnosti jak dokončit graf domečku. Buď do bodu D dojdeme „přes střechu“ domečku nebo napřímo. V obou případech jsme domeček jedním tahem dokončili a teď je potřeba si důkladně rozmyslet, jak tento graf namalovat jinak.

Všimněme si, že vždy musíme projít všechny uzly grafu a to v nějakém určeném pořadí. Do dalšího uzlu se vždy dostaneme několika způsoby. Pro zjednodušení modelu a ujištění, že se nám kombinace neopakují, zavedeme pravidlo, že pokud jdeme z bodu X do bodu Y, pak můžeme projít na této cestě bodem Z jen tehdy, pokud jsme tímto uzlem prošli již dříve. V případě, kdy jsme již prošli všechny uzly, máme vždy 2 možnosti jak dokončit domeček (počet řešení se tedy na konci vynásobí dvěma, ale do řešení ve stromovém tvaru jej neuvádíme kvůli větší přehlednosti). Pak se nám tato úloha rozpadá na strom jednotlivých řešení zapsaný formou Tabulky 2.

Tím jsme napočítali 22 způsobů jak projít všechny body A,B,C,D a protože lze vždy domeček dokončit ještě dvěma způsoby pro každou z těchto variant, tak dostáváme celkově 44 možností jak tento domeček nakreslit.

10. Laboratorní myš Evelína stojí na rovné desce v bodě $[0,0]$. Může udělat právě devět různých pohybů=„kroků“. Se stejnou pravděpodobností může udělat jeden krok na sever (tedy na pozici $[0,1]$), východ (tedy na pozici $[1,0]$), jih (na pozici $[0,-1]$), západ (na pozici $[-1,0]$), severovýchod (na pozici $[1,1]$), jihovýchod (na pozici $[-1,1]$), jihozápad (na pozici $[-1,-1]$), severozápad (na pozici $[-1,1]$) nebo zůstat na místě.

S jakou pravděpodobností bude po pěti krocích na pozici $[4,3]$? Výsledek udejte nejlépe ve tvaru zlomku.

Řešení příkladu 10

Uveďme dvě možná řešení tohoto příkladu.

1. způsob řešení:

Uvědomme si, že ať už se Evelína nalézá v jakémkoliv bodě, pak pravděpodobnost toho, že se posune směrem doprava (tedy na východ, severovýchod nebo jihovýchod) je $\frac{1}{3}$. (Taktéž je stejná pravděpodobnost přechodu nahoru, dolů či doleva.)

Cílová pozice $x = 4$ je dosažitelná způsobem:

- Čtyři kroky směrem doprava a jedním setrváním na místě. Pravěpodobnost $P_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 5$ (Evelína si může vybrat, ve kterém z pěti kroků setrvá na místě).

Cílová pozice $y = 3$ je dosažitelná dvěma způsoby:

- Čtyři kroky nahoru a jeden dolů, $P_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 5$,

nebo

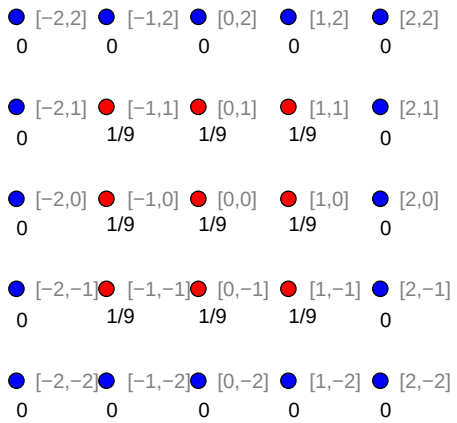
- Tři kroky nahoru a dvě pauzy, $P_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \binom{5}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 10$.

Při použití vzorců na průnik a sjednocení náhodných jevů dostáváme celkovou pravděpodobnost P ve tvaru

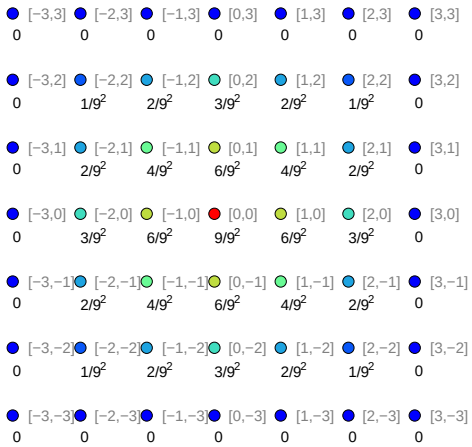
$$P = P_1\left(P_2 + P_3\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 5 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot 10\right) = \frac{75}{3^{10}} = \frac{75}{9^5}.$$

2. způsob řešení:

Při prvním kroku může Evelína udělat 9 různých pohybů=kroků. Je to krok na S, V, J, Z, SV, JV, JZ, SZ nebo může zůstat na původním místě. Každý krok může udělat se stejnou pravděpodobností, tedy s pravděpodobností $\frac{1}{9}$. Situace po prvním kroku je znázorněna na Obrázku 8.



Obrázek 8: Pravděpodobnost výskytu Evelíny v jednotlivých bodech po prvním kroku



Obrázek 9: Pravděpodobnost výskytu Evelíny v jednotlivých bodech po druhém kroku

Při druhém kroku už je situace o něco složitější. Například na pozici $[2,1]$ se Evelína může dostat tak, že v prvním kroku půjde z pozice $[0,0]$ na pozici $[1,0]$ (označme toto jako jev A) a v druhém kroku z $[1,0]$ na $[2,1]$ (jev B) nebo také tak, že v prvním kroku udělá krok z $[0,0]$ na $[1,1]$ (jev C) a v druhém kroku z $[1,1]$ na $[2,1]$ (jev D). Jevem E označme to, že Evelína je po druhém kroku na pozici $[2,1]$.

Předchozí úvahy můžeme zapsat ve tvaru

$$P\left(E\right) = \big(P\left(A\right) \cap P\left(B\right)\big) \cup \big(P\left(C\right) \cap P\left(D\right)\big).$$

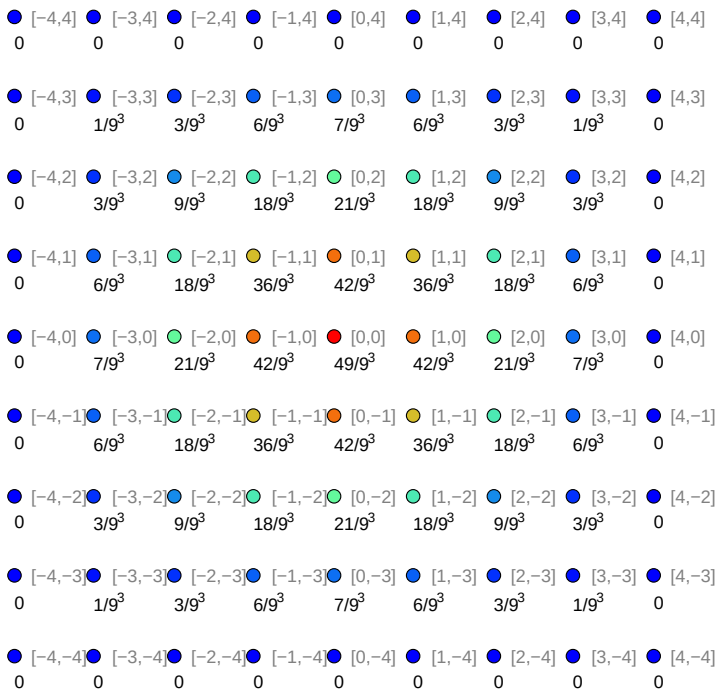
Uvědomme si, že pokud Evelína stojí po prvním kroku na nějaké konkrétní pozici, pak pravděpodobnost přechodu na jakoukoliv sousední pozici nebo setrvání na místě je opět $\frac{1}{9}$.

Při použití vzorců na průnik a sjednocení náhodných jevů tedy dostáváme

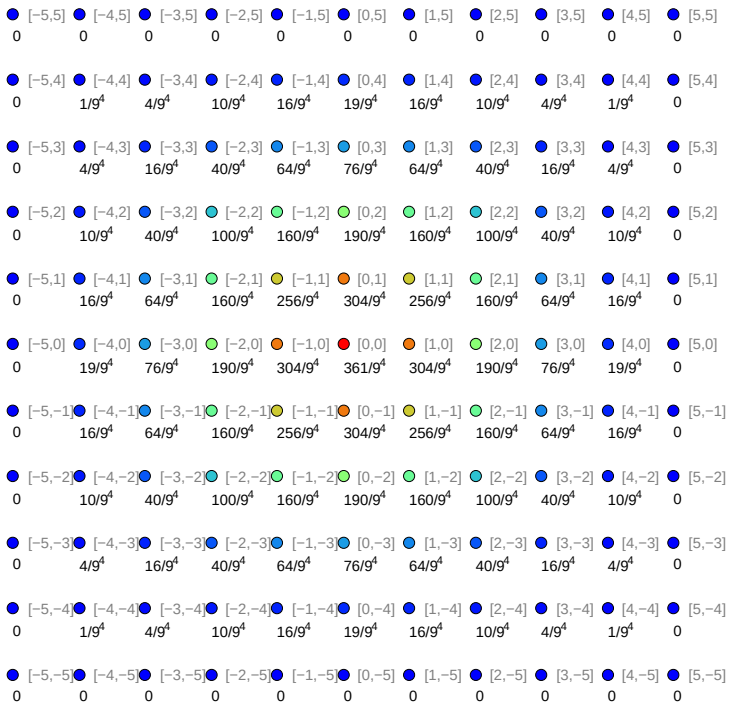
$$P\left(E\right) = \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{9^2}.$$

Podobně pokračujeme pro ostatní body a další kroky. Výsledky jsou zobrazeny na Obrázcích 9, 10, 11, 12.

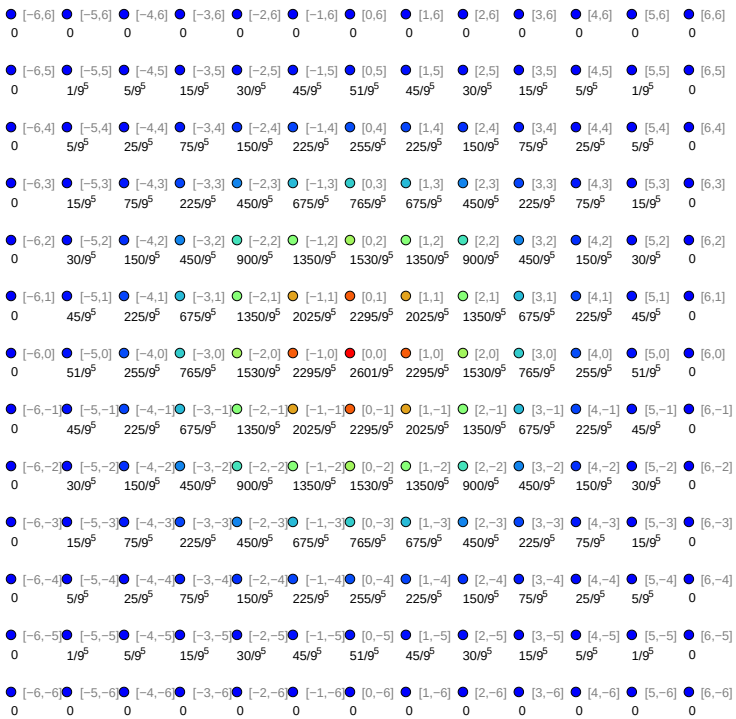
Pravděpodobnost, že se Evelína po pátém kroku ocitne na pozici [4,3] je $\frac{75}{9^5}$.



Obrázek 10: Pravděpodobnost výskytu Evelíny v jednotlivých bodech po třetím kroku



Obrázek 11: Pravděpodobnost výskytu Evelíny v jednotlivých bodech po čtvrtém kroku



Obrázek 12: Pravděpodobnost výskytu Evelíny v jednotlivých bodech po pátém kroku